This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

3 3433 06909726 3

Die

Formen- und Raumlehre

für

Volksschulen.

Nach einem für den Kreis dieser Anstalten besonders angeordneten Lehrgange.

Von

S. Muhl,

Lehrer am Königl. Preuß. Schullehrer-Seminar zu Trier.

NEW YORK PUBLIC LIBRARY

Mit 8 Tafeln Steindruck, nebst einem Anhange mit 2 solcher Tafeln, enthaltend die Größenlehre oder Geometrie für den Lehrer.

Trier, 1830.
bei C. Troschel.

(Muhl)
OKG

THE NEW
PUBLIC LIBR
244850
ASTOR, LE
TILDEN F
1902

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

Seiner Hochwohlgeboren,

dem Herrn

Freiherrn von Gärtner,

Präsident der Königlichen Regierung zu Trier, Ritter des rothen Adler-Ordens, Präsident der Gesellschaft nützlicher Forschungen daselbst ꝛc.

dem

edeln Menschenfreunde und eifrigen Beförderer des Guten,

NEW YORK PUBLIC LIBRARY

widmet diese Blätter als ein Zeichen seiner ausgezeichneten Hochachtung und Ergebenheit

Der Verfasser.

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

Vorwort.

Die Formen- und Raumlehre, für deren Behandlung, als Lehrzweig der Volksschule, in den folgenden Bogen eine Anleitung gegeben ist, beschäftigt sich mit dem Räumlichen, als einem wesentlichen Grunde des menschlichen Erkennens. Dazu bietet sie uns die Körper, Flächen, Linien und Punkte als Grundgegenstände dar. Doch ist es die Kenntniß dieser Gegenstände nicht allein, womit sich die Formen- und Raumlehre beschäftigen soll; sie eröffnet auch, durch die mannichfaltigen Erscheinungen, die Vergleichungen derselben und die Beziehungen, in welche sie gegenseitig zu einander gebracht werden können, für die Erkenntniß allgemeiner Wahrheiten, ein unerschöpfliches Feld; und obgleich aus diesem unermeßlichen Felde nur das Einfachste für den Kreis der Volksschulen ausgehoben werden kann, so ist demohngeachtet dieser Lehrzweig in seiner Einwirkung auf eine naturgemäße Jugendbildung von sehr großem Nutzen, denn:

1) Die Raumlehre leitet den Schüler an, die Formen und Gestalten aller Körper, die Größe, Lage u. s. w. auf das Genaueste aufzufassen, und übt daher das äußere, sinnliche Anschauungsvermögen; —

indem sie aber auch gelegentlich den Schüler veranlaßt, früher gehabte sinnliche Anschauungen in sich wieder zu erwecken, um sie gleichsam seinem innern Auge nochmals vorzuführen, übt sie auch das Erinnerungsvermögen und die Einbildungskraft. Diese Anleitung des Schülers ist von großer Wichtigkeit, denn zweckmäßige Uebung des Anschauungsvermögens ist der Grund für ein weiteres richtiges Denken, sie verwahrt deßwegen gegen schädliche Irrthümer und frommt dem Menschen in jedem Stande.

2) Die gewonnenen sinnlichen Anschauungen, sowie die in sich erweckten Vorstellungen, übergibt die Formen- und Raumlehre dem Verstande zur Verarbeitung in Begriffe, sie führt also den Schüler zur Auffindung und Erkenntniß allgemeiner Wahrheiten an, und wird dadurch ein ganz vorzügliches Mittel zur kräftigen Bildung des Verstandes. Zwar haben andere Unterrichtsfächer dieses mit der Formen- und Raumlehre gemein, wie z. B. die Zahlenlehre; aber sie treten bald aus dem Felde der Anschaulichkeit und wenden sich in das Reich der Begriffe. Erkenntnißfächer aber, welche bei vorzüglicher Einwirkung auf den Verstand, dennoch im Felde der sinnlichen Anschauung wurzeln, und deren Wahrheiten sich jederzeit unmittelbar auf die Anschauung zurückführen lassen, gewinnen dadurch gewiß an größerm Vorzuge.

3) Die Formen- und Raumlehre leitet ferner an, das Angeschaute wieder darzustellen. Dadurch übt sie die Hand und das Auge, weckt den Sinn für Regelmäßigkeit und Ordnung, und verschafft dem Schüler

praktische Fertigkeiten, welche für sein künftiges Berufsleben von großem Nutzen sind.

4) Da endlich die Formen- und Raumlehre sich ausschließlich mit dem beschäftigt, was sinnlich anschaubar ist, allenthalben auf folgerechtes Fortschreiten und Erschöpfen aller Möglichkeit in den räumlichen Verbindungen hält, so gibt sie dem Lehrer auch noch eine Regel für die Behandlung derjenigen Lehrfächer, welche sich ganz oder zum Theil mit dem sinnlich Anschaubaren beschäftigen. Der Lehrer dürfte daher in gegenwärtigem Werkchen, welches besonders für ihn bestimmt ist, neben der Bearbeitung der Raumlehre, wie sie, nach Maßgabe der besondern Umstände, unter denen er arbeitet, in der Schule betrieben werden kann, auch eine Anleitung für die methodische Behandlung anderer Lehrfächer haben.

Uebrigens versteht es sich von selbst, daß derjenige Lehrer, welcher seine Aufgabe gehörig gefaßt hat, da wo es unbeschadet der eigenthümlichen Natur eines Unterrichtsgegenstandes geschehen kann, mehre Zwecke verbindet, und namentlich auf die Ausbildung der Sprache des Schülers ein besonderes Augenmerk richte. Dieses Letztere kann zwar bei jedem Unterrichtszweige geschehen, da Lehrer und Schüler durch das Wort sich verständigen müssen; die Formen- und Raumlehre aber besitzt diese Eigenschaft in ganz vorzüglichem Grade, weil sie mit dem sinnlich Anschaubaren unmittelbar den Sprachausdruck verbindet, und dadurch das gehörige Verständniß desselben eröffnet.

Die Behandlung des Stoffes ist in den folgenden Bogen nach der Art und Weise ausgeführt, in welcher ich einige Aufsätze in der „Rhein. Westphälischen Monatschrift ꝛc.“ Jahrg. 1825 und 1826 über denselben Gegenstand zur Probe abdrucken ließ, jedoch nach viel umfassenderm Plane. Da das Werkchen hauptsächlich für den Lehrer bestimmt ist, so ist es auch demselben überlassen, dasjenige daraus auszuheben, was er, nach Maßgabe derjenigen besondern Umstände, unter welchen er arbeitet, und unbeschadet anderer Lehrfächer, für seine Schule geeignet findet; obgleich ich überall besonders auf das Rücksicht nahm, was mir aus dem großen Felde der Formen- und Raumlehre für den Kreis der Volksschulen passend schien. Darum habe ich auch aus der Größenlehre (sogenannten Geometrie) nur das Einfachste, für den gegenwärtigen Zweck praktisch Nützliche, und wie es sich mir auf meinem Wege ungesucht entgegenstellte, ausgehoben, habe dabei absichtlich alle sogenannten geometrischen Beweise, so viel ich konnte, umgangen, und dieselbe möglichst auf die bloße Anschauung zurückzuführen mich bemüht. Dieses Bestreben nöthigte mich aber oft, bei den verschiedenen Nachbildungen und Zeichnungen den Schülern ein bloßes Verfahren angeben zu müssen, welches auf anderweitigen Gründen beruhte, deren Erklärung sich mir auf meinem Wege nicht mehr natürlich, oder erst später entgegenstellte. Damit aber doch wenigstens der Lehrer den richtigen Grund dieser Verfahrungsweisen einsehe, und nach Maßgabe der Fähigkeit seiner Schüler Eines oder das Andere noch weiter zu führen im Stande sey, so habe ich dem

Werkchen einen Anhang beigefügt, in welchem der Lehrer für sich das Nöthigste aus der „Geometrie", in eigener Aufeinanderfolge, erlernen kann.

In Bezug auf die besondere Behandlung des Stoffes zur Formen- und Räumlehre, wie sie nämlich in den folgenden Bogen ausgeführt ist, muß ich noch des Urtheils erwähnen, das der Herr Seminar-Director Dr. F. A. W. Diesterweg über die genannten, in der Rh. Westph. Monatschrift abgedruckten Aufsätze fällt. In der Vorrede seines sehr gediegenen Werkes über denselben Gegenstand *) sagt er nämlich:

„Beachtenswerth bleibt das Bestreben S. Muhl's „in der Rhein. Westfäl. Monatschrift, Jahrg. 1825 „und 1826, die Formenlehre als eine allgemeine „Formenlehre der Natur, namentlich der Pflan„zenwelt, aufzustellen. Gewiß ging dasselbe aus der „richtigen Ansicht hervor, daß die Gebilde des An„schauungsvermögens mit den Werken der Schöpfung „zusammenfallen, daß auch in dieser Hinsicht die in„nere und äußere Welt übereinstimmen mußten. Das „wird sich aber mehr in den Gebieten der Steinwelt „nachweisen lassen. Denn in dem Gebiete der Pflan„zenwelt herrscht die Freiheit, wenigstens eine noch „nicht erkannte Nothwendigkeit, aber in den Steinen „treffen wir Regelmäßigkeit, nachweisbare Gesetzmäß„igkeit und Nothwendigkeit."

*) Raumlehre oder Geometrie von Dr. F. A. W. Diesterweg. Bonn bei Eduard Weber. 1828.

Darüber sey mir zu bemerken erlaubt, daß ich keinesweges eine Formenlehre des Pflanzenreichs aufstellen, sondern daß ich die Aufmerksamkeit des Schülers auf alle Raumgebilde und deren besondere Beziehungen zueinander, unter so mannichfaltiger Abänderung sie auch immer erscheinen möchten, lenken wollte, damit die lebendige Natur immer mehr der Hauptgegenstand des Anschauens und Abdenkens, also der lebendigen Uebung und Bildung des Anschauungsvermögens und des Verstandes werde, was in allen mir bis jetzt bekannten Anweisungen über Formen- und Raumlehre allzuwenig oder gar nicht beachtet ist; und daß ich deßwegen eben so wenig die Gebilde der Pflanzenwelt übergehen, als auch die des Stein- und Thierreichs und die Kunstgebilde unberücksichtigt lassen durfte. Sind auch die Gebilde des Pflanzenreichs und die meisten der Kunst nicht so geometrisch-regelmäßig, wie die regelmäßigen und symmetrischen Körper des Steinreichs, die Krystalle, und ist auch ihr Bildungsgesetz noch nicht so strenge erkannt, wie bei jenen: so kann ihnen doch dieses Gesetz nicht abgesprochen werden, da im ganzen Reiche der Natur und Kunst nichts gesetzlos ist, weil alles Schaffen unter einem obersten Weltgesetze steht. Ueberdies zeigen sich uns allenthalben wiederkehrende analoge Gebilde, welche einerseits auf ein analoges Bildungsgesetz unwidersprechlich hinweisen, und andererseits für die Formen- und Raumlehre einen Stoff darbieten, welcher um so weniger unbeachtet bleiben darf, da ihn das Steinreich, durch eben die Regelmäßigkeit in der Bildung der Krystalle, nicht zu geben vermag.

Möge indeß dieses Werkchen etwas dazu beitragen, der Formen- und Raumlehre, als Lehrzweig der Volksschule, größere Aufmerksamkeit und allgemeinere Aufnahme zu verschaffen, wie sie es, ihrer wohlthätigen Einwirkung auf die Jugendbildung wegen, wohl verdient!

Trier, im Monat Dezember 1829.

S. Muhl.

Inhalt-Anzeige.

I. Vorübungen.

		Seite.
§. 1.	Name des Ganzen	1.
§. 2.	Name der Theile	2.
§. 3.	Zahl der Theile	3.
§. 4.	Grenze	4.
§. 5.	Ausdehnung	5.
§. 6.	Größe. Messen	6.
§. 7.	Gestalt	7.
§. 8.	Vergrößern und Verkleinern	9.
§. 9.	Theilung	9.
§. 10.	Bewegung	10.
§. 11.	Lage, Stellung	10.

II. Von den Punkten.

§. 12.	Anschauung	15.
§. 13.	Nachbilden, Zeichnen	16.
§. 14.	Lage	17.
§. 15.	Bewegung	20.

III. Von den Linien.

A. Von den Linien im Allgemeinen.

§. 16.	Anschauung	21.
§. 17.	Arten	21.
§. 18.	Nachbilden, Zeichnen	22.

Seite.

B. Von den graden Linien.

§. 19. Eigenschaften . . . . . 23.
§. 20. Nachbilden, Zeichnen . . . . . 23.
§. 21. Größe. Vergleichen. Messen . . . . . 25.
§. 22. Vergrößern . . . . . 29.
§. 23. Verkleinern . . . . . 30.
§. 24. Theilen . . . . . 31.
§. 25. Lage . . . . . 33.
1. Wagrecht, senkrecht, schief . . . . . 33.
2. In einer oder in verschiedenen Ebenen . . . . 36.
3. Getrennt- und Vereinigtseyn im Allgemeinen . . 38.
4. Getrennte Linien ins Besondere. Gleichlaufend, ungleichlaufend, in einer Richtung . . . . . 40.
5. Verbindung des Gleichlaufend, Ungleichlaufend und in einer Richtung . . . . . 44.
6. Vereinigte Linien ins Besondere . . . . . 48.
§. 26. Bewegung . . . . . 51.

C. Von den krummen Linien.

1. Die Kreislinie, der Kreisstrich.

§. 27. Anschauung . . . . . 52.
§. 28 Entstehen. Nachbilden . . . . . 52.
§. 29. Größe. Messen. Vergleichen . . . . . 53.
§. 30. Theilen . . . . . 55.
§. 31 Lage . . . . . 58.
§. 32. Bewegung . . . . . 60.

2. Die Bogenlinie.

§. 33. Eigenschaften . . . . . 60.
§. 34. Größe . . . . . 61.
§. 35. Vergrößern und Verkleinern . . . . . 61.
§. 36. Theilen . . . . . 62.
§. 37 Lage . . . . . 62.

IV. Von den Winkeln.

Seite.

38. Anschauung. Theile . . . . . 68.
39. Art . . . . . 69.
40. Bildung. Zeichnen . . . . . 69.
41. Lage . . . . . 71.
42. Größe . . . . . 73.
1. Größe des Winkels im Allgemeinen. Vergrößern und Verkleinern: . . . . . 73.
2. Messen des Winkels . . . . . 74.
3. Art des gradlinigen Winkels, durch die Größe desselben bedingt . . . . . 75.
4. Art des krummlinigen Winkels . . . . . 83.
5. Vergleichen.
a) Im Allgemeinen . . . . . 84.
b) Mit dem Rechten . . . . . 87.
43. Theilen . . . . . 89.
44. Bewegung . . . . . 90.

V. Von den Flächen.

45. Eigenschaften der Fläche. Anschauung . . . . 91.
46. Theile der Fläche . . . . . 91.
47. Art der Flächen
1. Nach der eigentlichen Fläche . . . . . 92.
2. Nach der Umgrenzung . . . . . 96.
1) Im Allgemeinen . . . . . 96.
2) Nach der Zahl der Seiten, Winkel und Ecken . 98.
3) Die gradlinigen Flächen nach der Art ihrer Winkel, nach der Lage und Größe ihrer Seiten . . 100.
a) Nach der Art ihrer Winkel . . . . . 100.
b) Nach Lage und Größe der Seiten. . . . 101.
§. 48. Nachbilden. Zeichnen . . . . . 103.
§. 49. Größe. Vergleichen. Messen . . . . . 106.
1. Größe . . . . . 106.
2. Vergleichen . . . . . 112.
3. Messen . . . . . 124.

§. 50. Vergrößern und Verkleinern der Fläche . . . . 127.
§. 51. Theilung der Fläche
1. Theilung der Fläche im Allgemeinen . . . . 128.
2. — — — von Winkel zu Winkel. — Geren. 129.
3. — — — von Seite zu Seite . . . 132.
4. — — — von Winkel zu Seite, und von Seite zu Winkel . . . . 134.
5. — — — vom Mittelpunkte aus. . . 137.
§. 52. Lage der Flächen . . . . . 138.
1. Im Allgemeinen . . . . . 138.
2. Ebene Flächen in einerlei Ebene . . . . 139.
3. Flächen in verschiedenen Ebenen . . . . 140.
§. 53. Bewegung der Fläche . . . . . 141.

VI. Von den Körpern.

§. 54. Anschauung. Merkmale . . . . . 142.
§. 55. Arten der Körper . . . . . 151.
1. Im Allgemeinen . . . . . 151.
2. Die punktförmigen Körper. . . . . 153.
3. Die Linien-Körper . . . . . 154.
4. Die Flächen-Körper . . . . . 155.
5. Die Massen-Körper . . . . . 157.
§. 56. Nachbilden des Körpers . . . . . 158.
§. 57. Theilen des Körpers. . . . . 160.
§. 58. Größe. Vergleichen. Messen . . . . . 164.

I. Vorübungen.

Es wird für den ganzen formenlehrlichen Unterricht vorausgesetzt, daß der Lehrer die regelmäßigen Körper nach den Netzen, Tafel VII und VIII, Fig. 170 bis 187, aus Pappe oder Holz verfertigt, vor sich habe, die er den Schülern vorzeigen kann. — Am füglichsten schneidet er sich dieselben aus Pappe. Zu dem Ende verzeichnet man sich die angezeigten Netze auf ein Stück Pappendeckel und schneidet die ganz ausgezogenen Umfangslinien derselben ganz durch; die innern punktirten Linien aber erhalten nur einen Halbschnitt, so daß der Pappendeckel noch zusammenhangt, und nach der entgegengesetzten Seite sich leicht biegen läßt. Die ganz getrennten Umfangsseiten lassen sich leicht mit Nadel und Faden oder durch Mundleim vereinigen; auch können am Ende die Flächen mit weißem Papier überzogen werden.

---

§. 1. Name des Ganzen.

1. Der Würfel. (Netz 173.)
2. Die Ecksäule. (N. 178—181.)
   1) Die dreiseitige Ecksäule. (N. 178.)
   2) — vierseitige — (N. 179.)
   3) — fünfseitige — (N. 180.)
   4) — sechsseitige — (N. 181.)

3. Die Spitzsäule. (N. 182—185.)
   1) Die dreiseitige Spitzsäule. (N. 182.)
   2) — vierseitige — (N. 183.)
   3) — fünfseitige — (N. 184.)
   4) — sechsseitige — (N. 185.)
4. Das Flach. (N. 170—177.)
   1) Das Vierflach. (N. 170.)
   2) — Sechsflach. (N. 175.)
   3) — Rauten-Sechsflach. (N. 176.)
   4) — Achtflach. (N. 171.)
   5) — Zwölfflach. (N. 174.)
   6) — Rauten-Zwölfflach. (N. 177.)
   7) — Zwanzigflach. (N. 172.)
5. Die Walze. (N. 187.)
6. Der Kegel. (N. 186.)
7. Die Kugel.

---

§. 2. Name der Theile.

1. Die Flächen.
   1) Die Endflächen sind diejenigen Flächen, welche oben und unten, oder blos unten liegen, wenn der Körper auf einer Fläche steht.
      a) Die Grundfläche ist diejenige Endfläche, auf welcher der Körper steht.
      b) Die Oberfläche ist diejenige Endfläche, welche der Grundfläche grade gegenüber liegt. — Der Würfel und die Eckſäulen haben Grund- und Oberflächen; die Spitzsäulen haben nur Grundflächen.
   2) Die Seitenflächen sind diejenigen Flächen, welche zwischen den Endflächen liegen.

2. Die Ecken.
   1) Bei den Eckſäulen:
      a) Die Ecken um die Oberfläche.
      b) Die Ecken um die Grundfläche.
   2) Bei den Spitzſäulen:
      a) Die Ecken um die Grundfläche.
      b) Die Spitze, d. i. der Ecken, welcher der Grundfläche grade gegenüber liegt.
3. Die Kanten.
   1) Die Endkanten, d. i. diejenigen Kanten, welche um die Endflächen liegen.
   2) Die Seitenkanten, d. i. diejenigen Kanten, welche zwiſchen den Seitenflächen liegen.

Bei den Flach, das Vierflach ausgenommen, werden die Flächen, Ecken und Kanten nicht beſonders unterſchieden und benannt.

---

§. 3. Zahl der Theile.

Forderung: Zählet die Flächen, Ecken und Kanten des Würfels, der Eckſäulen, Spitzſäulen der Flach!

Tafel zur Uebersicht für den Lehrer.

Name der Körper.	Flächen	Ecken	Kanten
Der Würfel hat	6	8	12
Die dreiseitige Eckſäule hat . .	5	6	9
" vierseitige " " . .	6	8	12
" fünfseitige " " . .	7	10	15
" sechsseitige " " . .	8	12	18
Die dreiseitige Spitzſäule hat.	4	4	6
" vierseitige " "	5	5	8
" fünfseitige " "	6	6	10
" sechsseitige " "	7	7	12
Das Vierflach hat	4	4	6
" Sechsflach "	6	5	9
" Rauten-Sechsflach hat. . .	6	8	12
" Achtflach " . .	8	6	12
" Zwölfflach " . .	12	20	30
" Rauten-Zwölfflach " . .	12	14	24
" Zwanzigflach " . .	20	14	30

§. 4. Grenze.

1. Da, wo der Würfel endigt, ist dessen Grenze. Da, wo überhaupt ein Ding, ein Körper endigt (aufhört), ist dessen Grenze. — Der Würfel endigt in seinen Flächen, Ecken und Kanten. Die Eckſäule ist von Flächen, Ecken und Kanten begrenzt. Flächen, Ecken und Kanten begrenzen die Spitzſäule u. s. w.

2. Die Eckſäulen endigen oben und unten in ihren Endflächen, zur Seite aber in ihren Seitenflächen. Die Spitzſäulen endigen oben in ihrer Spitze.

3. Jede Fläche des Würfels, der vierseitigen Eckſäule, des Rauten-Sechs- und des Rauten-Zwölfflachs endigt in 4 Kanten. Die Endflächen der fünfſeitigen Eckſäule, und alle Flächen des Zwölfflachs ſind von fünf Kanten begrenzt. Alle Seitenflächen der Spitzſäulen, und alle Flächen des Vier-, Sechs-, Acht- und des Zwanzigflachs ſind von drei Kanten begrenzt u. ſ. w.

4. Jede Kante endigt an jedem ihrer Endpunkte in einem Ecken. In der Spitze der ſechsſeitigen Spitzſäule endigen ſechs Kanten u. ſ. w.

---

§. 5. Ausdehnung.

1. Bei dem Würfel, bei der Eckſäule, Spitzſäule u. ff. kann man fragen: Wie lang, wie breit, wie hoch? Sie haben eine Länge, eine Breite und eine Höhe; — ſie ſind nach Länge, Breite und Höhe ausgedehnt; — ſie haben eine Ausdehnung nach der Länge, Breite und Höhe; — ſie dehnen ſich aus nach (in die) u. ff. — ſie erſtrecken ſich in die u. ſ. w.

2. Jedes Ding, das Buch, Haus, Zimmer, die Tafel, der Berg u. ſ. f. hat eine Ausdehnung nach der Länge, Breite und Höhe; — es dehnt ſich aus— es erſtreckt ſich u. ſ. w.

3. Nicht bei allen Gegenſtänden nennt man die dritte Ausdehnung Höhe, ſondern oft Dicke oder Tiefe. Ein Fluß, See, Brunnen, eine Grube u. ſ. w. iſt tief; ein Buch, eine Tiſchplatte, ein Lineal u. ſ. f. iſt dick. — Die Walze iſt dick und lang; der Baum iſt dick und hoch; die Kugel iſt nur dick. Die Grube iſt tief; die Wände der Grube ſind hoch.

Was nicht lang ist, das ist kurz; was nicht breit ist, das ist schmal; was nicht dick ist, das ist dünn; was nicht hoch ist, das ist niedrig; was nicht tief ist, das ist seicht. Ein seichtes Wasser.

4. Die dritte Ausdehnung wird oft nach unserer Stellung benannt. So ist das Schulzimmer hoch, weil wir auf dem Boden desselben sind; es wäre aber tief, wenn wir uns an seiner obern Decke befänden.

5. Alle Dinge sind nach Länge, Breite und Höhe (Dicke, Tiefe) ausgedehnt; und alles, was diese drei Ausdehnungen besitzt, ist ein Körper.

6. Die Zimmerleute und Maurer nennen die Ausdehnung nach der vordern Seite Länge, die nach der Querseite Tiefe.

---

§. 6. Größe. Messen.

1. Der Würfel, die Eckſäule, die Spitzsäule, das Flach und überhaupt jeder Körper hat eine Größe; — er hat eine Körpergröße. Die Größe eines Körpers kann gemessen werden.

2. Die Fläche hat eine Ausdehnung in die Länge und Breite; — sie hat eine Größe; sie hat eine Flächengröße, welche gemessen werden kann.

3. Die Kante hat nur eine Ausdehnung in die Länge; — sie hat eine Größe; sie hat eine Längengröße. Auch die Längengröße kann gemessen werden.

4. Das Messen geschieht mittels des Maßes. Der Körper wird durch das Körpermaß oder Würfelmaß gemessen; die Fläche, durch das Flächen- oder Quadratmaß; die Kante, durch das Längenmaß: Ruthe, Fuß, Zoll; Meile, Stunde; Elle, Klafter u. s. w. So mißt man einen Holzstoß, einen

Heuschober, Steinhaufen, Baumstämme; der Geometer mißt die Fläche eines Feldes, einer Wiese; der Schreiner, die Fläche eines Brettes; der Baumeister, die Fläche eines Bauplatzes; der Kaufmann und Krämer mißt die Länge eines Stückes Tuch, einer Schnur; der Zimmermann, die Länge der Baubalken u. s. w.— Gewisse Körper, als Wasser, Oel, Essig, Bier, Wein u. s. werden mit dem Flüssigkeitsmaße gemessen, als: Maß, Schoppen, Quart, Eimer, Ohm, u. s. w. — andere aber, als Korn, Gerste, Hafer, Mehl u. ff. durch das Fruchtmaß: Malter, Faß u. ff.

5. Beim Würfel sind alle Ausdehnungen gleichgroß, d. h. er ist so lang als breit und hoch. Bei der vierseitigen Ecksäule ist die Länge der Breite gleich, die Höhe aber ist größer. — Bei den Seitenflächen aller Ecksäulen ist die Länge größer als die Breite.

6. Nicht bei allen Körpern sind diese Ausdehnungen gleichgroß. Ein Faden, Seil, Haar, ein Strick u. s. w. ist länger als dick; manche Tische, die Schulbänke, ein Fluß, Feld- und Hauptwege u. ff. sind länger als breit.

Forderung. Nennet Gegenstände, welche länger als breit; breiter als lang; breiter als hoch; dick oder tief; höher, tiefer, dicker als lang oder breit sind!

---

§. 7. Gestalt.

1. Der Würfel, die Ecksäule, Spitzsäule, das Flach und überhaupt jeder Körper hat eine Gestalt. Beim Würfelspiele werden Körper gebraucht, welche die Gestalt eines Würfels haben. Die behauenen (beschlagenen) Bauhölzer, die vierseitigen Lineale u. s. w.

haben die Gestalt einer vierseitigen Ecksäule; die Dächer mancher Thürme haben die Gestalt einer Spitzsäule. Es gibt also Hauptgestalten, welche vielen Körpern gemein sind. So haben Spiegel, gerahmte Bilder, manche Tischplatten, die Decken und Blätter der Bücher, die Fensterscheiben, Thüren und Fensterläden u. s. w. eine Hauptgestalt gemein. — Die Flächen des Würfels, die Endflächen der vierseitigen Ecksäule; — die Seitenflächen aller Ecksäulen; — die Seitenflächen aller Spitzsäulen, des Vier-, Sechs-, Acht- und des Zwanzigflachs haben einerlei Gestalt. Manche Pflanzenblätter haben die Hauptgestalt eines Herzens; Zwetschen und Pflaumen, die Zapfen der Fichten und Tannen, die Kätzchen der Weide, Birke, Erle, Haselnuß, Wallnuß, Pappel u. ff. haben die Gestalt eines Eies.

2. Wenn ein Stein, ein Baumstamm u. s. w. verarbeitet, geschliffen oder behauen wird, so erhält er dadurch eine andere Gestalt, als er von der Natur erhalten hatte. Vorher hatte er seine natürliche Gestalt; nun aber erhält er durch die Kunst der Menschen eine künstliche. So gibt der Schreiner, Drechsler, Zimmermann, Mühl- und Schiffbauer dem Holze; der Schmied, Schlosser, Nagelschmied, Blechner, Goldschmied, Uhrmacher u. ff. dem Metalle; der Steinhauer und Bildhauer dem Steine u. s. w. eine künstliche Gestalt. — Diese künstliche Gestalt kann gegeben werden: a) einer Oeffnung, durch Ausschneiden; b) einer Fläche, dnrch Abschneiden oder Eingraben (wie der Kupferstecher); c) einem Körper. — Man findet mancherlei Steine, welchen die Gestalt eines Fisches, einer Muschel, verschiedener Pflanzenblätter aufgedrückt ist.

Forderung. Nennet Körper von natürlicher, und solche von künstlicher Gestalt!

---

§. 8. Vergrößern und Verkleinern; Vermehren und Vermindern.

1. Was eine Größe hat, kann vergrößert und verkleinert werden; was aus einer Menge einzelner Theile besteht, kann vermehrt und vermindert werden. So vergrößert der Seiler ein Seil, die Spinnerin einen Faden u. s. w. — Ein Haufen Steine, eine Anzahl Aepfel u. ff. wird vermehrt, indem man Steine oder Aepfel hinzuthut. Die Vergrößerung und Vermehrung geschieht also durch das Hinzufügen des Gleichartigen.

2. Ein Faden, Balken, ein Stück Tuch u. ff. wird verkleinert, indem man ein gewisses Stück davon nimmt; ein Haufen Bohnen, Körner ꝛc. wird vermindert, indem man Bohnen, Körner u. ff. wegnimmt. Die Verkleinerung und Verminderung geschieht durch das Wegnehmen des Gleichartigen.

---

§. 9. Theilung.

Was eine Größe hat, kann zertheilt werden. Zur Theilung der Körper gebraucht man allerlei Werkzeuge. So zerspaltet man Holz mit der Axt und dem Beile; zerschneidet Holz mit der Säge, Papier und Tuch mit der Scheere; zerreibt Gyps, Lohe, Korn, Kartoffeln in Mühlen; zerschlägt Steine, Glas u. ff. mit dem Hammer; zerdrückt Trauben auf der Kelter; zerstampft Kartoffeln, Obst u. ff. mit dem Stößer u. s. w.

§. 10. Bewegung.

Was eine Größe hat, kann bewegt werden. Die Bewegung geschieht durch eine Bewegkraft. So wird ein Körper bewegt, wenn er von einer Stelle auf eine andere gebracht wird. — Der Hebel, die Säge, Feile u. ff. muß bewegt werden, wenn er (sie) schneiden (wirken) soll. Manche Körper sind zu gewissen Bewegungen besonders eingerichtet, als: Thüren, Fenster, Läden, Wagen- und Mühlräder, der Schleifstein, die Balken der Scheere u. s. w. — Der Stein fällt, die Kugel rollt, das Rad dreht sich, der Vogel fliegt, der Fisch schwimmt, der Wurm kriecht u. s. w.

---

§. 11. Lage, Stellung.

1. Der Würfel, die Eckſäule und überhaupt jeder Körper nimmt eine Stelle, einen Ort, einen Raum ein; d. i. er befindet sich irgendwo. Da, wo sich einer der Körper befindet, da kann zugleich kein anderer seyn; es kann so lange kein anderer dahin kommen, bis der erste daraus gebracht, daraus verdrängt ist. So verdrängt der ins Wasser geworfene Stein so viel Wasser, als er Raum einnimmt. Der Vogel, der Mensch in der Luft u. s. w.

2. Jeder Körper nimmt einen Raum ein, weil er groß ist. Der eingenommene Raum ist genau so groß, als der Körper, welcher ihn einnimmt. Eine leere Schachtel schließt einen Theil des Raumes ein, und die Form dieses Theiles hat genau die Gestalt des Innern der Schachtel. Röhre, Trinkglas, Topf, Kiste u. ff.

3. Eine Eckſäule oder Spitzſäule **ſteht**, wenn ſie auf einer der Endflächen aufruht; ihre Ausdehnung in die Höhe iſt am beträchtlichſten. Man ſagt auch von ihnen oder von jedem andern Gegenſtande, welcher dieſe **Stellung** hat, er iſt **aufrecht**, und von der **Unterlage unterſtützt**. — So ſtehen die Bäume, ein Thurm, ein Gebäude, die Mauern und Wände u. ſ. w. — Wenn ein Gegenſtand an ſeinem obern Ende beveſtigt iſt, ſo ſagt man, er **hangt**. Dieſes ſetzt einen veſten Punkt in die Höhe voraus, welcher auch der **Aufhängepunkt** genannt wird. So hangt das Bleiloth, die Gewichte an der Uhr, die Frucht am Baume u. ſ. w. Vom Loth und Senkel heißt dieſe Richtung auch **ſenkrecht** oder **lothrecht**.

4. Eine Eck- oder Spitzſäule **liegt**, wenn ſie auf einer ihrer Seitenflächen ruht; ihre Ausdehnung in die Länge iſt dann am beträchtlichſten. So ſagt man: Das Buch liegt auf dem Tiſche; Teutſchland liegt in Europa; Berlin liegt an der Spree; ein Feld, eine Wieſe liegt zwiſchen dem Wege und dem Bache u. ſ. w. — Ein Körper **ſchwimmt**, wenn er auf der Oberfläche einer tropfbaren Flüſſigkeit liegt, oder ſich auf ihr bewegt. So ſchwimmt das Schiff, Holz, Oel u. ff. auf dem Waſſer. Die Blätter mancher Waſſerpflanzen entfalten ſich erſt auf der Oberfläche des Waſſers, liegen aber beſtändig auf ihr, und darum ſagt man von ihnen: **Sie ſchwimmen**. — Von der Lage des Wagbalkens, wenn in beiden Wagſchalen gleichviel Gewicht iſt, und von der Lage der Oberfläche des ruhig ſtehenden Waſſers heißt dieſe Richtung oder Lage **wagrecht** oder **waſſerrecht**.

5. Gegenstände, welche nicht genau senkrecht stehen, oder wagrecht liegen, stehen oder liegen schief. Alsdann sagt man von ihnen: Sie sind geneigt, wenn sie ziemlich aufrecht sind, doch aber gegen irgend einen andern etwas von ihrer senkrechten Stellung abweichen. So liegen besonders die Abhänge der Hügel und Berge, die Flächen der Dächer u. s. w. Um die Stärke ihrer Neigung anzudeuten, gebraucht man die Ausdrücke: Ueberhangend, jäh, steil, schroff, auf- und absteigend.

6. Ein Gegenstand kann mit einem oder mehren andern Gegenständen ein Ganzes ausmachen. Der mit dem Ganzen verbundene Gegenstand ist alsdann: 1) Angeheftet, wenn er wirklich mit dem Ganzen so zusammenhangt, daß er mit demselben ein Ganzes ausmacht. Wird die Anheftung durch ein Mittel bewerkstelligt, so ist der Gegenstand mit einem andern verbunden, oder an einen größern bevestigt. Das Mittel selbst ist das Binde- oder Bevestigungsmittel, das Band. — So heftet der Schneider ein Stück Tuch an ein anderes; so verbindet der Schreiner zwei oder mehre Bretter durch Leim oder Nägel; so bevestigt man ein Seil an einen Baum u. s. w. Nach der Art der Bevestigung bedient man sich verschiedener Ausdrücke, als: Anbinden, annageln, knüpfen, leimen, einfügen, nähen, einsetzen, einschlagen u. s. w. — 2) Sitzend, wenn er, im Vergleich zum Ganzen, von geringem Umfange ist. So sitzt z. B. das Blatt am Baum, die Blume auf der Spitze des Stengels, in den Winkeln der Blätter oder Aeste u. s. w.

7. Von einem Gegenstande, womit ein oder mehre andre verbunden sind, sagt man: 1) Er besteht aus

diesen oder jenen Gegenständen, wenn beim Wegnehmen der einzeln gleichartigen Theile das Ganze verschwindet. Die einzeln Theile heißen auch Bestandtheile. So besteht das Kleeblatt aus drei Blättchen; der Baum besteht aus Wurzel, Stamm und Aesten; das Buch besteht aus Blättern u. ff. — 2) Er ist zusammengesetzt, wenn die einzeln verbundenen Gegenstände ungleichartig sind. Z. B. Ein Haus ist zusammengesetzt aus Holz, Steinen u. s. w. — 3) Er trägt einen andern, wenn er denselben a) hervorbringt, z. B. der Baum trägt Früchte, der Halm trägt die Aehre u. s. w., der getragene Gegenstand ist vom Ganzen unterstützt, wenn er an dessen Spitze oder an dem obern Ende desselben sich befindet, als: Der Strunk (des Pilzes) unterstützt den Hut, der Halm die Aehre, der Schaft die Blume u. s. w. b) Wenn der getragene Gegenstand auf der Spitze sitzt; z. B. der Berg trägt einen Wald auf seinem Rücken; der Thurm trägt ein Kreuz u. ff. Von allen Kleidungsstücken sagt man: Sie werden getragen. Der Mann trägt einen Hut u. s. w. — 4) Er nimmt auf, wenn die Vereinigung durch eine Bewegung geschieht. Z. B. ein Hauptbach nimmt Nebenbäche, ein Fluß Nebenflüsse, ein Strom Flüsse auf u. s. w.

8. Nach der Annäherung sind die mit einem Ganzen verbundenen Gegenstände: 1) Dicht, gehäuft, gedrängt, wenn sie ohne bedeutende Zwischenräume stehen. So können die Blätter und Aeste am Stengel, die Blumen auf dem gemeinschaftlichen Blumenboden stehen; so stehen die Haare auf dem Kopfe; so ist der Hund dicht mit Haaren, das Schaaf mit Wolle, der Vogel mit Federn, der Fisch mit Schup-

pen u. s. w. bedeckt. — 2) Geballt, wenn die gehäuft stehenden Gegenstände eine rundliche Figur bilden. So stehen z. B. die Blüthchen der Amaranthen, Melden, Nesseln u. s. w. — 3) Zerstreut, wenn die verbundenen Gegenstände ohne Ordnung stehen, und zwischen denselben verhältnißmäßig große Zwischenräume sind. So liegen nämlich die Städte, Dörfer und Meierhöfe in einem Lande; so stehen oft die Bäume auf den Feldern, die Blätter und Aeste am Stamme und Stengel u. s. w.

9. Wenn ein Gegenstand, dessen Lage oder Stellung bestimmt werden soll, mit einem andern nicht zusammenhangt, demselben mehr oder minder nahe ist, so wird seine Lage oder Stellung zu dem andern durch folgende Ausdrücke bezeichnet: 1) Genähert, wenn der Zwischenraum kleiner ist, als gewöhnlich. 2) Entfernt, wenn der Zwischenraum größer ist, als gewöhnlich. 3) Nachbarlich, wenn sie unmittelbar nebeneinander liegen, daher die Ausdrücke: Nachbar-Thäler, Nachbar-Inseln, Nachbar-Staaten u. s. w. — 4) Angelehnt, wenn er, bei schiefer Stellung, mit seinem obern Ende an einem andern Gegenstande ruht. 5) Aufgelegt, wenn er unmittelbar, ganz oder zum Theil auf einem andern ruht. In diesem Falle deckt der aufgelegte Gegenstand den andern, wenn seine Umgrenzung genau mit der des andern zusammenfällt.

II. Von den Punkten.

§. 12. Anschauung.

1. Die Ecken des Würfels, der Eck- und Spitzsäulen, der Flach, erscheinen als Punkte. Der Stift oder die Nadelspitze, das Ende eines Haares u. s. w. stellen Punkte dar. Ueberhaupt erscheinen uns solche Gegenstände als Punkte, deren Größe, entweder durch ihre allzugroße Entfernung, oder im Vergleich mit einem ungleich größern Gegenstande, nicht in Betracht kommen kann. Immer aber müssen jene Gegenstände in die Runde ausgedehnt seyn, oder durch Lage und Stellung das Ansehen (den Schein) haben, als seyen sie ihrer größten Ausdehnung nach rund. So erscheinen uns die meisten Sterne am Abende als glänzende Punkte; der Knopf auf einem Kirchthurme sieht, in gewisser Entfernung, wie ein Punkt aus; ein Thautropfen ist, gegen eine Kanonenkugel gehalten, wie ein Punkt zu betrachten; der Knoten in einem Faden, in einem Haare u. s. w.

2. Wenn man sich vorstellt, daß der Würfel, die Kugel u. s. f. nach jeder Richtung immer kleiner werde, bis endlich alle Größe aufhört, so ist man auf den Gedankenpunkt, auf den Punkt der Geometer gekommen, welcher keine Größe hat. Man denkt sich den geometrischen oder mathemathischen Punkt da, wo alle Größe aufhört. — Jede Kante erscheint als eine Linie. Da, wo eine Linie endigt, ist ein Punkt. Die Linie endigt in zwei Punkten.

3. Da, wo eine Linie oder ein sehr dünner langer Körper, ein Faden, Haar u. ff. anfängt, da ist der Anfangspunkt; wo sie endigt, der Endpunkt. Gleichweit vom Anfangs- und Endpunkte liegt der

Mittelpunkt. — Mittelpunkt des Kreises, einer Kugel. — Der Ecken des Würfels u. ff. als Punkt angesehen, heißt Eckpunkt. — Scheitelpunkt ist derjenige, den wir uns grade überm Haupte in der hohlen Himmelskugel denken. Dem Scheitelpunkt grade gegenüber liegt der Fußpunkt.

---

§. 13. Nachbilden, Zeichnen.

1. Man bildet den Punkt nach mit der Spitze eines Griffels, einer Feder, eines Bleistiftes, einer Nadel u. ff. auf einer Tafel, auf Papier u. s. w. und man hat alsdann das Punktzeichen gebildet. Dieses Punktzeichen ist nicht der Punkt selbst, nicht der Gedankenpunkt; denn es hat noch eine Größe, weil man sich immer noch eine Mitte darin denken kann; der Punkt aber hat keine Größe.

2. Das Punktzeichen wird zu verschiedenen Zwecken gebildet. So gebraucht man dasselbe in der Schrift, im Drucke, in der Notenschrift, in der Geometrie, beim Zeichnen und Malen u. s. w.

3. Das Punktzeichen kommt auf manchen Körpern, z. B. auf manchen Pflanzen- und Blumenblättern, bei vielen Thieren u. ff. als Zeichnung vor. Ist die Ausdehnung desselben gering, so heißt es Punkt; ist sie beträchtlicher, so wird es Tüpfel, bei noch stärkerer Ausdehnung, Fleck genannt. Ist der Fleck rund, so kann in seiner Mitte ein anders gefärbter runder Fleck liegen, und dann entsteht das, was man Auge nennt. So sind z. B. die Augen auf den Flügeln mancher Schmetterlinge, die Federn des Pfauenhahns sind geäugelt u. s. w. Von diesen Benenn-

ungen kommen die Ausdrücke: Punktirt, gepunktet, gefleckt, geäugelt her.

---

§. 14. Lage.

1. Zwei Punkte liegen nebeneinander. Ein Punkt liegt neben, über, oder unter einem andern. Liegen zwei Punkte neben einander, so liegt einer rechts oder links neben dem andern; liegt einer über oder unter dem andern, so liegt er senkrecht oder schief über oder unter ihm. So liegt, Fig. 1. der Punkt a links neben b; b liegt rechts neben a; ebenso die Punkte c und d; der Punkt c liegt senkrecht unter a, und d unter b; a liegt senkrecht über c, und b über d; der Punkt e liegt: von a rechts unten, von b links unten; von c rechts oben, von d links oben. Der Punkt e liegt zwischen c und b oder a und d. Der Punkt a liegt in der Reihe ab Fig. 2. vor dem Punkt c, und c liegt hinter a. — Am Würfel und an der vierseitigen Eckſäule, welche auf irgend einer Fläche ruhen, liegen 4 Eckpunkte um jede Fläche. Jeder Eckpunkt der Oberfläche liegt senkrecht über einem solchen an der Grundfläche. An jeder Fläche liegen sich zwei Eckpunkte gegenüber. Ein Eckpunkt an der Oberfläche ist einem andern an der Grundfläche entgegengesetzt. — Gebet die Lage eines jeden Eckpunktes in Beziehung zu einem jeden andern an! — An der Spitzsäule liegt die Spitze schief über jedem Eckpunkte der Grundfläche. An dem Sechsflach gibt es nur zwei entgegengesetzte Eckpunkte; an dem Achtflach, drei mal zwei solcher.

2. Zwei oder mehre Punkte können nur getrennt neben einander liegen; denn sollten sie sich

vereinigen, so würden sie auf einander fallen und nur einen Punkt bilden, weil sie keine Ausdehnung haben. Die Punktzeichen aber können getrennt oder vereinigt seyn, weil sie eine Größe haben.

3. Mehre getrennte Punkte oder Punktzeichen bilden eine Reihe, wenn sie in grader Richtung neben einander liegen. Jeder einzele Punkt liegt in der Reihe, wenn er mit allen übrigen in einer Richtung liegt; er liegt außer der Reihe, wenn das nicht der Fall ist. Die Reihe selbst ist wagrecht, senkrecht oder schief. In Fig. 2. sind ab, gi und hk u. ff. wagrechte, ah, bk u. ff. senkrechte, und cg, dh, el u. ff. an, co, dp u. ff. schiefe Reihen. — So setzt man Bäume, Weinreben und sonstige Pflanzen in wagrechte und senkrechte Reihen; so stehen die Häuser einer Straße, die Soldaten beim Exerziren u. s. w. in Reihen. Auch Gegenstände anderer Art können in Reihen stehen oder liegen, als Hügel, Berge, Seen, Inseln u. s. daher die Ausdrücke: Hügelreihe, Berg-, See-, Inselreihen. — Wie die Punkte in Fig. 2. zueinander liegen, so setzt man auch Pflanzen, so stehen die Federn auf dem Körper des Vogels u. s. w.

4. Von drei Punkten einer Reihe ist einer der mittelste (b Fig. 3) und zwei (a, c) die äußern. Bei 4 Punkten einer Reihe gibt es 2 mittlere und 2 äußere; bei 5 Punkten gibt es einen mittelsten, 3 mittlere und 2 äußere. — Nur bei den ungraden Anzahlen von Punkten einer Reihe gibt es einen mittelsten.

5. Die kürzeste Entfernung zwischen zwei getrennten Punkten heißt Strecke. Die Strecken zwischen mehren Punkten einer Reihe sind:

Zwischen 2 Punkten liegt 1 Strecke;
— 3 — liegen 2 Strecken;
— 4 — — 3 —
— 5 — — 4 —
— 6 — — 5 — u. s. w.

Ueberhaupt ist die Anzahl der Strecken zwischen den Punkten einer Reihe um 1 kleiner, als die Anzahl der Punkte. — Liegen die Punkte nicht in einer Reihe, so ist die Anzahl der Strecken zwischen ihnen eine andere. So liegen:

Zwischen 2 Punkten 1 Strecke;
— 3 — 3 Strecken;
— 4 — 6 —
— 5 — 10 —
— 6 — 15 — u. s. w.

Ueberhaupt erhält man die Anzahl aller möglichen Strecken zwischen Punkten, welche nicht in einer Reihe liegen, wenn man die Anzahl der Punkte mit der um 1 kleinern Zahl multiplizirt, und das Produkt mit 2 dividirt. Darnach werden also:

Zwischen 10 Punkten $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$;
— 11 — $\frac{11 \cdot 10}{2} = 55$;
— 12 — $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$;
— 20 — $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$ Strecken liegen.

(Siehe Anhang, Aufgabe 30 und 31.)

6. Liegen Punkte oder deren Zeichen oft, aber unregelmäßig, und mehr in die Runde beisammen, so bilden sie eine Gruppe. Auch Gegenstände, welche auf diese Weise neben einander liegen, bilden eine

Gruppe, sie sind gruppirt. So spricht man von Baum-, Berg-, See-, Inſel-, Stern-, Felſengruppen u. ſ. w.

7. Das Punktzeichen in grader Richtung oft vereinigt, ſtellt eine Kette dar. So liegen die Glieder einer Kette; auch hat man von dieſer Lage die Ausdrücke: Hügel-, Berg-, Inſelkette u. ſ. w. entnommen.

8. Wenn Gegenſtände, welche als Punkte angeſehen werden können, aufeinander liegen, ſo bilden ſie einen Haufen; z. B. Kugeln, Steine, Früchte, als: Aepfel, Birnen, Bohnen, Erbſen, Kartoffeln u. ſ. w. Iſt der Haufen rundlich und oben ſpitz, ſo heißt er Kuppe. Iſt die Ausdehnung der aufeinanderliegenden Gegenſtände in die Länge beträchtlich, ſo entſteht der Stoß, daher Holzſtoß u. ſ. w.

---

§. 15. Bewegung.

Einen Punkt kann man ſich bewegt denken. Während ſeiner Bewegung legt er einen Weg, eine Bahn zurück, welche eine Linie darſtellt. — Mit Gegenſtänden, welche als Punkte angeſehen werden können, verhält es ſich ebenſo. So bewegt ſich ein geworfener, ein fallender Stein, die abgeſchoſſene Kugel, die rollende Kugel, der fallende Regentropfen, die Schneeflocken u. ſ. w. Wenn ſich die Spitze des Bleiſtiftes, die mit Tinte angefeuchtete Feder, geſpitzte Kreide u. ſ. über die Tafel, über Papier u. ff. bewegt, ſo wird deren Weg zugleich verzeichnet durch das Abfärben. So geſchieht das Schreiben und Zeichnen.

Bemerkung. Die Ansicht von Lage und Stellung, wo sie auch immer besprochen werden mag, gibt dem Lehrer, welcher den Gegenstand lebendig zu behandeln weiß, die schönste Gelegenheit, den Sinn des größten Theils unserer Verhältnißwörter (Präpositionen) klar zu machen. —

III. Von den Linien.

A. Von den Linien im Allgemeinen.

§. 16. Anschauung.

Jede Kante erscheint als eine Linie. Jede Kante des Würfels, der Eckſäulen, Spitzsäulen, der Flach u. s. erscheint als eine grade Linie. Die Kanten der Walze und des Kegels erscheinen als eine Kreislinie. — Diese Kanten als Linien gedacht, heißen auch Kantenlinien.

---

§. 17. Arten.

1. Es gibt grade und krumme Linien. Eine grade Linie ist eine solche, welche ihre Richtung niemals ändert. — Eine krumme Linie ist eine solche, welche ihre Richtung stäts, stätig ändert.

2. Die grade und krumme Linie geben die Urform für eine Menge von Gegenständen, welche hauptsächlich nach der Länge ausgedehnt sind, und deren Breite oder Dicke gegen ihre Länge fast gar nicht in Anschlag kommt. Diese Form erhält den Namen Linienform; und ein Körper, welchem diese Form eigen ist, ist linienförmig. So sind z. B. manche

Pflanzentheile, als: Halme der Gräser, die Grannen, die Blätter der Fichten und Tannen u. ff. linienförmig.

3. Auch der Faden erscheint in der Linienform, und von ihm hat sie auch den Namen Fadenform; daher ein Körper fadenförmig heißt, wenn ihm diese Form angehört.

4. Die feinste Linienform hat das Haar, und daher heißt sie auch Haarform. So sind manche Pflanzentheile, die Haare der Menschen und Thiere, die Borsten der Tagfliegen, die Fäden im Gespinnste der Spinne und Seidenraupe, die einzeln Theile der Wolle u. s. w. haarförmig.

---

§. 18. Nachbilden, Zeichnen.

Das Zeichen einer Linie heißt Strich oder blos Linie. Man kann grade und krumme Striche bilden. Einen Strich bildet man mit der Spitze eines Stiftes, einer mit Tinte angefeuchteten Feder, mit dem Griffel, mit der Kreide u. s. w. Die Spitze des Werkzeugs betrachtet man als Punkt, und indem dieser sich auf einem Gegenstande bewegt, und die Spur seiner Bewegung zurückgelassen hat, ist der Strich gebildet worden. Der Strich entsteht durch die Bewegung eines punktförmigen Körpers, wie die Gedankenlinie durch die Bewegung eines Gedankenpunktes. Durch die unveränderte grade Richtung in der Bewegung des Punktes und des punktförmigen Körpers entsteht die grade Linie und der grade Strich; durch die veränderte Richtung aber, die krumme Linie und der krumme Strich.

B. Von den graden Linien.

§. 19. Eigenschaften.

Die grade Linie hat eine Ausdehnung in die Länge — sie ist nur nach einer Richtung ausgedehnt— sie hat also eine Größe; daher kann sie gemessen, vermehrt, vermindert und getheilt werden. Die grade Linie hat eine gewisse Lage, und sie kann daher bewegt, oder als bewegt gedacht werden. Die grade Linie hat ferner zwei Endpunkte.

---

§. 20. Nachbilden, Zeichnen.

1. Man zieht einen graden Strich (eine grade Linie), indem man mit einem Stifte, Griffel u. s. w. an einem Lineale vorbeizieht, so daß der Stift überall mit dem Lineale in Berührung bleibt; auch muß das Lineal überall auf der Oberfläche des Gegenstandes aufliegen, sonst ist es unmöglich, einen graden Strich zu ziehen, wie z. B. auf einer Kugel.

2. Will man einen graden Strich zwischen zwei Punkte ziehen, so muß man das Lineal denselben so nähern, wie es die Spitze des Stiftes erlaubt; das Lineal muß während des Ziehens in unveränderter Lage, und der Stift stäts in Berührung mit demselben bleiben. Liegt der eine Punkt senkrecht über oder unter dem andern, so ist auch der zwischengezogene Strich senkrecht; liegt der eine Punkt wagrecht neben dem andern, so hat auch der Strich diese Lage; liegt endlich der eine Punkt schief über oder unter dem andern, so liegt auch der zwischengezogene Strich schief. Also: Die Lage zweier Punkte bestimmt die

Lage der zwischenliegenden Linie, oder des zwischengezogenen Striches.

3. Will man untersuchen, ob eine Linie oder ein Strich grade sey, so darf man nur eine andere Linie, einen Strich, oder einen Gegenstand daran legen, von welchen man weiß, daß sie grade sind.

4. Will man auf dem Felde eine grade Linie durch Meßstäbe abstecken, so steckt man in die Endpunkte der zu bestimmenden graden Linie Stäbe ein, und setzt zwischen dieselben andere, so daß jeder neugesetzte mit den beiden ersten in derselben Richtung steht.

5. Beim Schreiben und Zeichnen werden grade Striche mit Lineal und Feder oder Reißblei gezogen; — im Druck, in der Notenschrift, an den Wänden der Zimmer u. s. f. kommen grade Striche vor; — der Schreiner zieht grade Striche mit Röthel oder Reißblei auf Bretter; — die Zimmerleute und Dielschneider bilden ihre grade Striche mittels einer Schnur, welche sie vorher mit Kohlenwasser schwarz angefeuchtet haben, indem sie dieselbe an zwei Punkten vesthalten, in der Mitte aufheben und sie wieder niederschnellen. Der Glasner schneidet mit Lineal und einer Diamantspitze die Glasscheiben in grader Linie. Der Ackerer zieht seine Furchen, der Gärtner mittels der Schnur einen furchenähnlichen Strich; der Buchbinder beschneidet das Papier und die Ränder der Bücher, der Schreiner hobelt die Ränder der Bretter nach grader Linie. — Das Setzen der Bäume, der Kohl-, Salat-, Blumenpflanzen u. s. w. geschieht nach der Meßschnur. — Um eine Reihe Soldaten in grade Richtung zu bringen, stellt man erst einige Mann in gewisser Entfernung in grader Richtung auf, und die übrigen treten in die Zwischenräume der erstern.

Bei der Beurtheilung, ob eine Reihe Bäume, Soldaten u. ff. in grader Richtung gestellt ist, muß man absehen, ob alle einzelen mit dem ersten und letzten in grader Linie stehen. — Ein angespannter Faden, Strick, eine Schnur u. ff. stellt eine grade Linie dar; der nicht unterstützte Stein fällt in grader Linie u. s. w.

---

§. 21. Größe. Vergleichen. Messen.

1. Die grade Linie hat eine Größe, welche Länge heißt. Auch bei Gegenständen, deren Breite und Dicke nicht in Betracht kommt, versteht man unter Größe blos ihre Länge; z. B. beim Haar, Faden, Strich u. s. w.

2. Vergleicht man zwei grade Linien ihrer Größe nach, so sind sie gleich- oder ungleichgroß. — Von drei Linien können seyn: drei gleichgroß; — 2 gleichgroß, und eine länger oder kürzer als dieselben; — alle drei ungleichgroß. Von vier Linien können seyn: 4 gleichgroß; — 3 gleichgroß, und die vierte länger oder kürzer; — 2 gleichgroß und 2 ungleichgroß; — 2 gleichgroß und 2 gleichgroß, welche jedoch länger oder kürzer als die beiden ersten sind; — alle 4 ungleichgroß. — Es gibt also Linien von einerlei, zweierlei, dreierlei ꝛc. Länge.

3. Wenn Fig. 16. ab = cd und ef = cd, so muß auch ab = ef seyn; denn wenn ab = cd ist, so kann man beide verwechseln, und eine statt der andern nehmen. Ist ef = cd, so können auch sie verwechselt werden. Wenn nun ab = cd, und cd mit ef verwechselt werden kann, so ist auch ab = ef. Also: Wenn zwei Größen einzeln einer dritten gleich sind, so sind sie unter einander gleich.

— Der Lehrer mache diese Wahrheit noch durch andere Beispiele klar.

4. Wenn zwei grade Linien, Kanten, linienförmige Körper u. ff. einander gleich sind, so fallen beim Aufeinanderlegen derselben ihre Endpunkte genau in einander. So sind alle Kanten des Würfels, des Vierflachs, des Rautensechsflachs, Achtflachs, Zwölfflachs und des Zwanzigflachs einander gleich. Alle Endkanten, ebenso alle Seitenkanten der Eck- und Spitzsäulen sind gleichgroß.

Forderung. Nennet Gegenstände und gebet zugleich an, welche Kanten daran gleichgroß sind! — Zeichnet 2, 3, 4 u. ff. gleichgroße Striche! Dieses geschieht, indem man die gleiche Entfernung ihrer Endpunkte durch die Zirkelöffnung bezeichnet, und zwischen dieselbe die Striche zieht; oder indem man vorher die Striche zieht, und alsdann in dem einen wie in dem andern mit der Zirkelöffnung ihre gleiche Größe bestimmt.

5. Ein Strich, eine Linie, Kante u. s. w. ist größer oder kleiner als eine andere, wenn beim Aufeinanderlegen derselben ihre Endpunkte nicht genau ineinander fallen. So sind die Seitenkanten aller Eck- und Spitzsäulen größer, als deren Endkanten. — Legt man zwei ungleichgroße Linien, Stäbe, Kanten u. ff. aufeinander, so ist das, was die (der) eine größer oder kleiner ist als der andere, der Unterschied ihrer Größe oder Länge. Um z. B. den Unterschied zwischen zwei ungleichlangen Strichen zu finden, faßt man die Länge des kleinern zwischen die Spitzen des Zirkels, setzt alsdann den einen Fuß in den einen Punkt des größern Striches, und sticht

die genommene Weite auf demselben ab. Der übrige Theil des größern Striches ist der Unterschied.

6. Ist eine Linie, Kante u. ff. größer als eine andere, so kann die größere, 2, 3, 4 u. ff. mal so groß seyn, als die erstere. Man kann alsdann die kleinere 2, 3, 4 u. ff. mal auf die größere legen, d. h. die kleinere ist alsdann 2, 3, 4 u. ff. mal in der größeren enthalten. Die kleinere Linie, Kante u. ff. ist die Einheit für die größere, sie ist das Maß für dieselbe.

Forderung. 1) Zeichnet einen graden Strich, welcher 2, 3, 4 u. ff. Zoll lang ist! — Man zeichnet einen graden Strich, faßt zwischen die Spitzen des Zirkels genau die Länge eines Zolls, und trägt dieselbe auf den gezogenen Strich 2, 3, 4 u. ff. mal.

Forderung. 2) Zeichnet einen Strich, welcher 2, 3, 4 u. ff. mal so lang ist, als ein anderer! — Man faßt die Länge des gegebenen Striches genau zwischen die Zirkelspitzen, und trägt dieselbe 2, 3, 4 u. ff. mal auf einen vorher von unbestimmter, doch ausreichender Länge gezogenen Strich in ununterbrochener Reihe.

7. Die Größe der Linie, der Kante, des Striches u. ff. kann gemessen werden, d. i. man kann angeben, wie oft eine genau bekannte Größe, welche als Grundmaß angenommen wird, in ihr enthalten ist. Die grade Linie wird durch das Längenmaß gemessen. Zur Ausmessung bedient man sich häufig der Länge eines Mannsfußes, daher Fuß genannt; sodann der Länge eines Schrittes, der Arm- und Handlängen, der Hand- und Fingerbreite, u. s. w. Vorzüglich aber werden die künstlichen Maße hierzu angewendet. Dieser sind: 1) Die Ruthe. Sie

wird in 12 Fuß, und dieser in 12 Zoll getheilt. 2) Die Elle. Die preußische Elle hält 25 1/2 preuß. Zoll. — Bedeutendere Längen werden nach Meilen bestimmt. Die preuß. Meile hat 2000 Ruthen. — Handwerker bedienen sich zu kleinern Längen der Maßstäbe d.h. Stäbe, auf welchen die Länge eines oder mehrer Fuß, Zoll und Linien angegeben sind. Zu größern Längen bedient man sich der Meßstangen, Meßketten und Meßschnüre.

Bemerkung. Den Kindern die Maße wirklich vorzuzeigen, ist höchst nothwendig, der deutlichen Anschauung wegen; — sie selbst messen lassen, etwa die Länge oder Breite des Schulzimmers, der Bank, des Tisches u. ff. — und nach dem bloßen Augenmaße die Länge schätzen lassen, sind sehr nützliche Uebungen, die dem Lehrer sehr empfohlen zu werden verdienen.

8. Die grade Linie dient dazu, die Entfernung zwischen zwei Punkten zu messen. Um diese Entfernung zu erfahren, darf man nur die zwischen ihnen liegende grade Linie messen.

9. Der Punkt a Fig. 4. kann sich nach b in der Richtung ab bewegen, oder er kann auf verschiedene Weise von dieser Richtung abweichen. Wenn nun dieses Letztere geschähe, wenn er z. B. die Abweichungen ac und bc machte, so würde er zu diesem Wege natürlicher Weise mehr Zeit brauchen, als auf dem Wege ab. Also: Eine grade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten.

§. 22. Vergrößern.

1. Eine grade Linie kann an einem oder an beiden ihrer Enden fortgezogen, d. i. vergrößert oder verlängert werden; und zwar kann diese Vergrößerung bis ins Unendliche gedacht werden. Die Vergrößerung der graden Linie geschieht durch die Verlängerung derselben an einem oder an beiden Enden. — Will man einen graden Strich verlängern, so muß das Lineal so an dieselbe gelegt werden, daß es in derselben Richtung liegt, und der Stift genau in den Endpunkt zu stehen kommt, an welchem er verlängert werden soll. — Will man auf dem Felde eine grade Linie verlängern, so muß man von einem in der zu verlängernden Linie stehenden Stabe aus an einem zweiten vorbeizielen, und den folgenden Stab in die Ziellinie einstecken lassen u. s. w. — denn die Lage zweier Punkte bestimmt die Lage einer Linie genau.

2. Man kann eine grade Linie um eine bestimmte Länge vergrößern. Setzt man zu jeder von zwei gleichgroßen Linien ein gleichgroßes Stück hinzu, so sind die beiden verlängerten Linien wieder einander gleich. Also: Gleiches zu Gleichem hinzugethan, gibt Gleiches. — Setzt man zu zwei ungleichgroßen Linien zwei gleichgroße Stücke hinzu, so sind die beiden verlängerten Linien ungleichgroß. Also: Gleiches zu Ungleichem gethan, gibt Ungleiches. — Vergrößert man zwei gleichgroße Linien um ungleichgroße Stücke, so werden die vergrößerten Linien ungleich. Also: Ungleiches zu Gleichem gethan, gibt Ungleiches. — Verlängert man zwei ungleichlange Linien um ungleichlange Stücke, so können die verlängerten Stücke gleich oder ungleichgroß seyn. Also: Ungleiches zu Ungleichem gethan,

gibt Gleiches oder Ungleiches. Gleichgroß werden die vergrößerten Linien, wenn zu der kleinern so viel mehr hinzukommt, als sie kleiner ist wie die größere. Kommt z. B. zu der kleinern Linie ab Fig. 5. das Stück bf, und zu der größern Linie cd das Stück dh, so sind beide Linien af und ch einander gleich, wenn be gleich gd, als dem Unterschiede zwischen ab und cd ist, und überdies ef noch gleich dh. —

3. Eine von zwei gleichen Linien ist die Hälfte beider, oder der Summe; eine von drei gleichen Linien ist das Drittel u. s. w. — Von zwei ungleichen Linien ist die kleinere weniger, und die größere mehr als die Hälfte der Summe beider. Wenn man z. B. die kleinere Linie ab Fig. 6. der Hälfte der Summe beider gleich machen will, so muß man zur kleinern die Hälfte von fd setzen, welches der Unterschied zwischen ab und cd ist. Es ist nun ab = cf und be = fg, also auch ae = cg. Also: Die kleinere von zwei ungleichen Längen (Größen), mehr der halbe Unterschied zwischen beiden, ist der halben Summe gleich.

---

§. 23. Verkleinern.

1. Eine grade Linie kann an einem oder an beiden Enden verkleinert, d. i. verkürzt werden. Die Verkleinerung geschieht, indem man an einem oder an beiden Enden gewisse Stücke wegnimmt, sie um gewisse Stücke verkürzt.

2. Man kann eine grade Linie um eine bestimmte Länge verkürzen. — Verkürzt man jede von zwei gleichgroßen Linien um zwei gleichgroße Stücke, so sind die Reste wieder gleich. Also: Gleiches von

Gleichem weggenommen, läßt Gleiches zurück. — Verkleinert man zwei ungleiche Linien um gleichgroße Stücke, so sind die Reste ungleich. Also: Gleiches von Ungleichem genommen, läßt Ungleiches zurück. Verkleinert man zwei gleiche Linien um ungleiche Stücke, so sind die Reste ungleich. Also: Ungleiches von Gleichem genommen, läßt Ungleiches zurück. — Nimmt man endlich ungleiche Stücke von ungleichgroßen Linien weg, so können die Reste gleich- oder ungleichgroß seyn. Also: Ungleiches von Ungleichem genommen, läßt Gleiches oder Ungleiches zurück. Die Reste sind gleich, wenn man von der größern Linie den Unterschied zwischen beiden mehr wegthut, als von der kleinern. Die Fig. 5. macht dieses anschaulich.

3. Die Vergrößerung einer Linie von bestimmter Größe kann nicht ins Unendliche gedacht werden, denn sie nimmt einmal ein Ende, und sie wird bis zum Punkte verkürzt.

---

§. 24. Theilen.

1. Jede grade Linie kann in Theile zerlegt, d. i. getheilt werden. Die Theilung derselben geschieht durch Punkte, welche man sich in derselben denkt; die des Striches durch Punktzeichen, welche man in demselben sich merkt. — Zur Theilung einer Linie, eines Striches in 2 Theile hat man 1 Punkt; zu 3 Theilen, 2 Punkte; zu 4 Theilen, 3 Punkte nöthig u. s. w. Die Anzahl der Theile ist jedesmal um 1 größer, als die der Theilungspunkte.

2. Zur Theilung einer Linie in gleiche Theile bedient man sich des Zirkels und des Lineals. Soll z. B. der Strich ab Fig. 7. in zwei gleiche Theile getheilt werden, so zieht man aus a und b mit gleicher Zirkelöffnung zwei Kreise, deren Umringe sich auf beiden Seiten von ab durchschneiden. Zu dem Ende nimmt man die Zirkelöffnung größer als die Hälfte von ab. Die beiden Durchschnittspunkte c und d verbindet man durch einen graden Strich, so wird dadurch ab in zwei gleiche Theile getheilt. — Man braucht bei diesem Verfahren die Kreise nicht ganz zu ziehen, sondern nur, wie Fig. 8. kleine Bogen auf beiden Seiten von ab, welche sich in c und d schneiden. — Ist der zu theilende Strich sehr groß, so daß die Zirkelöffnung dafür nicht ausreicht, so vermindert man denselben an beiden Enden um gleichgroße Stücke so lange, bis für den mittelsten Rest die Zirkelöffnung ausreicht; ist sie zu klein, so vermehrt man sie, bis obiges Verfahren bequem ausgeführt werden kann. — Setzt man dieses Verfahren für jeden neuentstandenen Theil nach und nach fort, so erhält man 2, 4, 8, 16, 32 u. s. w. (Siehe Anhang §. 47.). —

3. Bei der Theilung in drei gleiche Theile muß man anders verfahren. Wenn z. B. der Strich ab, Fig. 9. in drei gleiche Theile getheilt werden soll, so setzt man den Strich ah von beliebiger Länge und mit beliebiger Neigung gegen ab in a an, trägt darauf mittels der Zirkelöffnung drei gleiche Theile ae, ef und fg, verbindet den Punkt g mit b durch einen graden Strich, und zieht nun aus f und e gleichlaufende d. i. Striche, welche allenthalben gleichweit von einander entfernt sind, mit gb, wodurch die Theile

ac, cd und db einander gleich werden. Durch dieses Verfahren kann jede Linie, jeder Strich in jede beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt werden. (Siehe Anhang §. 56.)

4. Wenn man eine Linie in 2 gleiche Theile, und jede Hälfte wieder in 2 gleiche Theile theilt, so erhält man im Ganzen 2 . 2 = 4 Theile; theilt man das Viertel in 5 Theile, so erhält das Ganze 4 . 5 = 20 Theile; theilt man das Siebentel in 9 Theile, so erhält das Ganze 7 . 9 = 63 Theile u. s. w. — Will man eine in 2 gleiche Theile getheilte Linie in 3 gleiche Theile theilen, so muß jede Hälfte in 3 Theile getheilt werden; will man eine schon in 5 Theile getheilte Linie in 6 Theile theilen, so muß jedes Fünftel in 6 Theile zerlegt werden u. s. w. —

---

§. 25. Lage.

1) Wagrecht, senkrecht, schief.

1. Wenn in den beiden Schalen einer Wage gleichviel Gewicht liegt, so hat der Wagbalken (die Stange, an welcher die Wagschalen beveſtigt sind) eine Lage, die veſt beſtimmt iſt, und nur dann geändert wird, wenn in die eine der beiden Schalen mehr Gewicht kommt, als in die andere. Daher nennt man dieſe Lage wagrecht. Dieſelbe Lage hat auch die Oberfläche des in Gefäßen ruhig ſtehenden Waſſers, weßwegen ſie auch waſſerrecht genannt wird. Die Waſſerwage, Fig. 10. d. i. zwei gläſerne Röhren cd und ef, welche mit einer dritten df ſo verbunden ſind, daß das darein gefüllte Waſſer freien Zutritt aus der einen in die andere hat, ſtellt zwiſchen ab eine wagrechte oder waſſerrechte Linie dar,

wenn die Wasserfläche in beiden Schenkeln auf gleicher Höhe steht. Man bedient sich ihrer, um auf dem Felde wagrechte Linien abzusehen. — Denkt man sich eine Fläche, welche allenthalben und rund um uns her in der Höhe unserer Augen liegt, so trifft diese, auf großen Ebenen oder auf der Meeresfläche, wo keine Erhebungen unsere Aussicht beschränken, da mit dem scheinbaren Himmelsgewölbe zusammen, wo dieses die Erde zu berühren scheint. Diese Fläche heißt **Horizont**, und hat die wagrechte Lage, weßwegen man diese Lage auch **horizontal** nennt. Die Ausdrücke: **Wagrecht, wasserrecht** und **horizontal** sind daher ganz gleichbedeutend. — Eine grade Linie kann dieselbe Lage haben, und dann sagt man von ihr: **Sie liegt wagrecht, wasserrecht** oder **horizontal.** So liegen die Kanten der Endflächen des Würfels und aller Eckſäulen.

Eine wagrechte, wasserrechte oder horizontale Linie ist diejenige, welche die Lage eines im Gleichgewichte stehenden Wagbalkens, der Oberfläche eines stehenden Wassers, oder die der Horizontal-Fläche hat.

2. Wenn man einen Faden an einem Ende bevestigt, und an das andere Ende desselben einen schweren Körper hängt, so daß dadurch der Faden straff angezogen wird, so entsteht das **Senkel** oder **Loth**, welches so lange eine vest bestimmte Richtung andeutet, als der angehängte Körper in Ruhe ist. Eine grade Linie kann dieselbe Richtung oder Lage haben, und dann sagt man von ihr: **Sie ist senkrecht, senkelrecht oder lothrecht.**

Eine senkrechte oder lothrechte Linie ist diejenige, welche die Richtung oder Lage ei-

nes in Ruhe stehenden Senkels oder Lothes hat.

So stehen die Seitenkanten des Würfels und aller Eckſäulen; die Thürme, die Maſten der Schiffe u. ſ. w. stehen gewöhnlich ſenkrecht; der fallende Stein beſchreibt eine ſenkrechte Linie u. ff.

Zur Beſtimmung der ſenkrechten oder lothrechten Richtung bedient man ſich der Grundwage, Setzwage Fig. 11., wodurch zugleich gefunden wird, auf welcher andern Linie cd die Linie ab ſenkrecht ſteht.

Eine andere Probe für die ſenkrechte Lage einer Linie iſt folgende: Will man z. B. unterſuchen, ob der Stab ab Fig. 12. ſenkrecht auf cd ſtehe, ſo mißt man bc = bd, und wenn nun ac = ad iſt, ſo ſteht ab ſenkrecht. Man darf aber bc und bd nicht allzuklein nehmen. (Siehe Anhang §. 4, 5 und 29, ſo wie Aufgabe 2 und 3.).

3. Iſt eine Linie weder wagrecht noch ſenkrecht, ſo fällt ihre Lage zwiſchen die wagrechte und ſenkrechte Richtung, und man ſagt von ihr: Sie iſt ſchief oder geneigt.

Schiefe oder geneigte Linien ſind diejenigen, deren Lage zwiſchen die ſenkrechte und wagrechte Richtung fällt.

So liegen alle Seitenkanten der Spitzſäulen, wenn ſie auf ihrer Grundfläche ſtehen; ſo liegen viele Kanten des Vier-, Sechs-, Acht-, Zwölf- und Zwanzigflachs. — Wenn man den Würfel, die Eckſäule, Spitzſäule u. ſ. auf eine Kante, auf einen Ecken, auf eine Fläche ſtellt, wie liegen alsdann ihre Kanten, und wie viele von jeder Lage finden ſich vor?

Die ſchiefe Linie iſt rechts ſchief, wenn ſich das obere Ende derſelben nach der rechten Seite; ſie iſt

links schief, wenn es sich nach der linken Seite neigt.

Forderung. Zeichnet senkrechte, wagrechte, schiefe Striche! — Der schiefe Strich kann gezogen werden: 1) von links unten nach rechts oben; 2) von rechts unten nach links oben; 3) von links oben nach rechts unten; 4) von rechts oben nach links unten. — Jede mögliche Anzahl von graden Linien liegt entweder wagrecht, senkrecht oder schief.

4. Wenn man einen Strich zwischen zwei Punkte zieht, so hängt seine Lage von der der beiden Punkte ab. Liegt der eine Punkt senkrecht über oder unter dem andern, so liegt der zwischengezogene Strich auch senkrecht; liegt der eine Punkt wagrecht neben dem andern, so liegt der Strich ebenfalls wagrecht; liegt endlich der eine Punkt schief über oder unter dem andern, so liegt auch der zwischengezogene Strich schief. Also: Die Lage zweier Punkte bestimmt die Lage der zwischenliegenden Linie.

5. Will man von einem Punkte zu einem andern mehr als eine grade Linie ziehen, so werden diese ihrer ganzen Ausdehnung nach zusammenfallen, d. h. sich genau decken und nur eine Linie bilden. Also: Zwischen zwei Punkten ist nur eine grade Linie möglich.

---

2) In einer oder in verschiedenen Ebenen.

1. Eine grade Linie liegt jedesmal in einer gewissen Fläche, welche man auch Ebene nennt. So liegt jede Kante der Oberfläche des Würfels in der

Oberfläche, und zugleich in einer der Seitenflächen. Jede Seitenkante des Würfels liegt in der Ebene zweier Seitenflächen, d. h. sie ist für zwei Seitenflächen gemeinschaftlich. Ueberhaupt, jede Kante des Würfels ist für zwei Flächen desselben gemeinschaftlich. — Wie verhält sich dieses bei der Eck- und Spitzsäule, bei dem Vier-, Sechs-, ꝛc. Flach?

2. Je zwei Kanten des Würfels, welche in einem Eckpunkte zusammentreffen, liegen in einer und in zwei Ebenen, d. h. sie sind für drei Flächen gemeinschaftlich. Dasselbe gilt von zwei Kanten, welche an einer Fläche einander gegenüber liegen. Zwei Kanten des Würfels, welche einander entgegengesetzt sind, liegen in einer Ebene, welche man sich quer durch den Würfel geschoben denkt. Jede dieser Kanten ist für zwei Flächen gemeinschaftlich. Ueberhaupt: Je zwei Kanten des Würfels, welche sich entweder zunächst, oder einander gegenüber liegen, oder einander engegengesetzt sind, liegen jedesmal in einer Ebene. — Wie verhält sich dieses bei den übrigen Körpern?

3. Je zwei Kanten des Würfels, welche sich weder zunächst, noch gegenüber liegen, noch einander entgegengesetzt sind, liegen in zwei verschiedenen Ebenen. — Wie verhält sich dieses bei den Eck- und Spitzsäulen, bei dem Vier-, Sechs-, Acht- u. s. w. Flach?

4. Grade Linien können eben diese Lage haben, und dann liegen:

1 Linie, in 1 Ebene.
2 " " 1 oder 2 Ebenen.
3 " " 1, 2 oder 3 Ebenen.
4 " " 1, 2, 3 oder 4 Ebenen u. s. w.

3) Getrennt- und Vereinigtseyn im Allgemeinen.

1. Zwei grade Linien liegen entweder entfernt neben oder von einander, oder sie berühren sich, treffen sich, stoßen zusammen. Man sagt von ihnen: Sie sind getrennt oder vereinigt. Fig. 13.

2. Zwei getrennte Linien treffen sich bei ihrer Verlängerung, oder sie treffen sich nicht. Im ersten Falle liegen sie in einer Ebene; im zweiten Falle aber können sie in einer oder in zwei Ebenen liegen.

3. Eine grade Linie ist weder getrennt, noch vereinigt. Um getrennte oder vereinigte Linien zu haben, müssen ihrer wenigstens zwei seyn. Von zwei an kann aber jede Anzahl von Linien getrennt oder vereinigt seyn.

4. Um getrennte und vereinigte Linien zugleich darstellen zu können, braucht man wenigstens drei Linien oder Striche; von drei an kann man aber mit jeder beliebigen Anzahl dieses thun. Dann gibt es folgende Fälle:

Anzahl der Linien oder Striche.	Vereinigt.	Getrennt.	Fig.
3	2	1	14.
4	3	1	15.
	2	2	
	2 u. 2		
5	4	1	
	3	2	
	3 u. 2		
	2	3	
	2 u. 2	1	
6	5	1	
	4	2	
	4 u. 2		
	3	3	
	3 u. 2	1	
	3 u. 3		
	2	4	
	2 u. 2	2	
	2, 2 u. 2		

Bemerkung. Die Figuren für die verschiedenen Fälle bei 5 und 6 Linien sind nach Fig. 15. leicht zu bilden. Der Lehrer lasse sie von den Schülern aufsuchen.

5. Die Gedankenlinien können sich nicht nach ihrer Länge vereinigen, weil sie keine Breite haben, sondern nur in Punkten. Linienförmige Körper aber können sich auf beiderlei Weise vereinigen. So vereinigen sich der Länge nach: Zusammengebundene Stäbe, Stricknadeln, Stangen, die Halme in einer Garbe, die Fäden in dichten Geweben, welche darin nach einer Richtung liegen u. s. w. — Die Kanten der Eck- und Spitzsäulen, und der Flach, vereinigen sich in ihren Eck-

punkten. — Wie viele Kanten vereinigen sich in den Ecken der Eckſäulen, der Spitzſäulen, des Vier-, Sechs-, Acht- ꝛc. Flachs?

---

4) Getrennte Linien ins Beſondere. Gleichlaufend, ungleichlaufend, in einer Richtung.

1. Liegen zwei grade Linien in einer Ebene, ſo können ſie ſo nebeneinander liegen, daß ſie allenthalben gleichweit von einander entfernt ſind; ſie werden alsdann bei ihrer Verlängerung auch nie zuſammentreffen. Man ſagt alsdann von ihnen: Sie ſind gleichlaufend. Fig. 16.

Gleichlaufende Linien ſind diejenigen, welche ſo in einer Ebene neben einander liegen, daß ſie allenthalben gleichweit von einander entfernt ſind, und bei ihrer Verlängerung ſich nie treffen.

So ſind am Würfel je zwei Kanten gleichlaufend, welche an einer Fläche einander gegenüber liegen; ebenſo je zwei ſich entgegengeſetzte Kanten deſſelben. — Welche und wie viele Kanten der Eck- und Spitzſäulen, der Flach, ſind gleichlaufend? — So ſind die Reihen der Weinreben, der Bäume in Alleen u. ff. gleichlaufend. Die Reihen der Buchſtaben im Druck und in der Schrift ſtehen gleichlaufend. So müſſen die Wände der Schiebladen an Tiſchen und Kommoden mit den Fugen gleichlaufend ſeyn, wenn ſie ſich bequem und ohne anzuſtoßen darin bewegen ſollen; ebenſo die Seiten des Stempels in einer Pumpe mit der hohlen Seite der Röhre, in welcher er ſich be-

wegt. Der Ackerer zieht seine Furchen, der Weber spannt die Fäden des Zettels gleichlaufend. Wenn der Schreiner zwei Bretter aneinander fügen will, so muß er erst die zwei aneinander zufügenden Seiten gleichlaufend machen.

2. Das Mittel, gleichlaufende Striche zu ziehen, ist ein Lineal ab Fig. 17. und ein Dreieck cde. Zieht man darnach die Linie di, bewegt das Dreieck nach fgh und zieht nun die Linie fk, so muß die Linie di mit fk gleichlaufend seyn. — (Siehe Anhang, Aufgabe 6.). Zur Probe der gleichlaufenden Linien und Seiten bedienen sich die Zeichner und Handwerker des sogenannten T, Fig. 18. das aus zwei senkrecht auf einander stehenden Linealen von genau gleichlaufenden Seiten besteht. — Zum Ziehen der gleichlaufenden Notenlinien bedient man sich des Rostrals, das aus fünf aneinander bevestigten Reißfedern besteht. Auf gleiche Weise zerkratzt die Egge in gleichlaufenden Strichen die Schollen des gepflügten Ackers, zertheilt der Kamm die Haare, die Hechel den Flachs und Hanf u. s. w.

Forderung. Zeichnet gleichlaufende Striche! Nennet Gegenstände, an welchen gleichlaufende Kanten, Striche u. s. vorkommen! — Wie viele Paar gleichlaufende Seiten, Kanten sind an dem Tische, an dem Fenster, an den Thüren u. s. w.?

3. Da gleichlaufende Linien allenthalben gleichweit von einander entfernt sind, so wird ab Fig. 19. so groß als cd seyn, wenn c so weit von a, als d von b entfernt ist; aus demselben Grunde wird ac=bd seyn. Denn man denke sich ab in wagrechter Lage abwärts bewegt, bis sie in die Lage von cd kommt, so wird a in c und b in d fallen, weil ab weder

größer noch kleiner geworden ist. Auf gleiche Weise wird a in b und c in d fallen, wenn man ac gegen bd bewegt denkt. Also: Gleichlaufende Linien zwischen gleichlaufenden sind gleichgroß.

4. Wenn zwei getrennte grade Linien in einer Ebene so nebeneinander liegen, daß sie an einem ihrer Enden näher beisammen sind, als an dem andern, so sagt man von ihnen: Sie sind ungleichlaufend. Diese Linien werden sich bei ihrer Verlängerung auf einer Seite immer mehr von einander entfernen, auf der andern aber einander immer näher kommen, bis sie endlich zusammentreffen.

Ungleichlaufende Linien sind daher solche, welche so in einer Ebene neben einander liegen, daß sie sich auf einer Seite einander nähern, auf der andern aber von einander sich entfernen, so daß sie bei ihrer Verlängerung auf einer Seite zusammentreffen. Fig. 13.

So liegen alle Kanten am Vier- und Sechsflach ungleichlaufend; ebenso alle Kanten an den übrigen Körpern, welche in einem Ecken zusammentreffen. — Nennet Gegenstände, an welchen ungleichlaufende Kanten, Striche, Linien vorkommen! Zeichnet 2, 3, 4 u. ff. ungleichlaufende Striche! — Von zwei an kann jede Anzahl von Strichen und Linien ungleichlaufend liegen.

5. Oft liegen Linien so in einer Ebene neben einander, daß die eine als Fortsetzung der andern betrachtet werden kann. Bei der Verlängerung an den Enden derselben, welche sich zunächst liegen, bilden sie nur eine grade Linie. Man sagt von diesen Linien: Sie liegen in einer Richtung. Fig. 20.

Linien in einer Richtung sind daher solche, welche so in einer Ebene bei einander liegen, daß sie bei ihrer Verlängerung nur eine grade Linie bilden.

So werden die einzelen Abtheilungen der Soldaten in eine Richtung gestellt; so muß der Flintenlauf mit der graden Linie zwischen dem Auge des Schützen und dem Ziele in eine Richtung gebracht werden; um eine Reihe zu bilden, müssen Gegenstände mit mehren andern in eine Richtung gebracht werden. — Zeichnet 2, 3, 4 u. ff. Striche in einer Richtung!

6. Wenn eine von mehren gleichlaufenden, oder von Linien in einer Richtung, wagrecht, senkrecht oder schief liegt, so haben alle übrigen dieselbe Lage. Also: Gleichlaufende oder Linien in einer Richtung haben alle einerlei Lage. Fig. 20.

Von drei oder mehren ungleichlaufenden Linien in einer Ebene kann nur eine wagrecht und eine senkrecht seyn, alle übrigen aber müssen schief liegen; und selbst diese sind alle verschieden geneigt. Also: Ungleichlaufende Linien haben alle verschiedene Lage. Fig. 20. zum Theil.

7. Von drei Linien, welche neben einander liegen, sey es gleichlaufend, ungleichlaufend oder in einer Richtung, ist eine die mittelste (Fig. 16. von ab, cd und ef, die Linie cd), und die beiden andern (ab und ef) sind die äußern. — Bei vier Linien, ab, cd, ef und gh sind cd und ef die mittlern, und ab und gh die äußern — es ist keine mittelste vorhanden. — Bei fünf Linien gibt es eine mittelste ef, drei mittlere cd, ef und gh, vier äußere

ab, cd, gh und ik, und zwei äußerste Linien ab und ik. — Wie verhält sich dieses bei 6, 7 u. ff. Linien? — Ueberhaupt: Nur bei den ungraden Anzahlen gibt es eine mittelste Linie.

Frage 1. Wie viele liegen bei 9 Linien zwischen der mittelsten und äußersten?

Antw. Nimmt man die mittelste von 9 Linien weg, so bleiben noch 8; diese sind auf beiden Seiten der mittelsten gleich vertheilt, also liegen auf jeder ihrer Seiten noch 4 Linien; von diesen ist aber noch eine die äußerste, folglich liegen zwischen der mittelsten und äußersten 3 Linien.

Fr. 2. Wie groß ist die Anzahl der Linien, wo zwischen der mittelsten und äußersten 7 Linien liegen?

Antw. Die genannten 7 Linien liegen auf beiden Seiten der mittelsten, also sind ihrer 14, mehr die mittelste, gibt 15; thut man zu diesen noch die beiden äußersten, so erhält man 17 Linien im Ganzen.

Daß sich alles dieses auch so bei den Gegenständen verhalte, versteht sich von selbst.

---

5) Verbindung des Gleichlaufend, Ungleichlaufend und in einer Richtung.

1. Eine Linie ist weder gleichlaufend, noch ungleichlaufend, noch in einer Richtung. Um daher eines dieser Verhältnisse mit Strichen darstellen zu können, braucht man ihrer wenigstens zwei; sonst aber kann man dieses mit jeder Anzahl thun.

Um gleichlaufende und ungleichlaufende Linien zugleich darstellen zu können, braucht man wenigstens 3 Striche; von 3 an kann man es aber mit jeder beliebigen Anzahl. Alsdann gibt es folgende Fälle;

Anzahl der Linien.	Gleichlaufend.	Ungleichlaufend.	Fig.
3	2	1	21.
4	3	1	22.
	2	2	
	2 u. 2		
5	4	1	
	3	2	
	3 u. 2		
	2	3	
	2 u. 2	1	
6	5	1	
	4	2	
	4 u. 2		
	3	3	
	3 u. 2	1	
	3 u. 3		
	2	4	
	2 u. 2	2	
	2 u. 2 u. 2		

2. Um gleichlaufende und Linien in einer Richtung darzustellen, hat man wieder 3 Striche nöthig, und von 3 an kann dieses Verhältniß mit jeder beliebigen Anzahl von Strichen dargestellt werden. Es gibt dann folgende Fälle:

Anzahl der Linien.	Gleichlaufend.	In einer Richtung.	Fig.
3	2	1	23.
4	3	1	24.
	2	2	
	2 u. 2		
5	4	1	
	3	2	
	3 u. 2		
	2	3	
	2 u. 2	1	
6	5	1	
	4	2	
	4 u. 2		
	3	3	
	3 u. 2	1	
	3 u. 3		
	2	4	
	2 u. 2	2	
	2 u. 2 u. 2		

3. Um ungleichlaufende und Linien in einer Richtung darzustellen, braucht man ebenfalls wenigstens 3 Striche; und man bildet mit diesen und mehren folgende Fälle:

Anzahl der Linien.	In einer Richtung.	Gleichlaufend.	Fig.
3	2	1	25.
4	3	1	26.
	2	2	
	2 u. 2		
5	4	1	
	3	2	
	3 u. 2		
	2	3	
	2 u. 2	1	
6	5	1	
	4	2	
	4 u. 2		
	3	3	
	3 u. 2	1	
	3 u. 3		
	2	3	
	2 u. 2	2	
	2 u. 2 u. 2		

4. Um endlich gleichlaufende, ungleichlaufende und Linien in einer Richtung zugleich darzustellen, muß man wenigstens 4 Striche haben. Alsdann sind 2 gleichlaufend, 1 ungleichlaufend, und eine mit irgend einer der vorhergehenden in einer Richtung. Fig. 27. Die Art der Ausführung für 5, 6 u. f. Linien ist in den vorhergehenden Ausführungen gegeben.

Daß sich dieses alles bei Gegenständen, welche in der Linien-, Faden- oder Haarform erscheinen, ebenso verhalte, versteht sich.

5. Zwischen zwei getrennten Linien, Strichen, Gegenständen, gibt es einen Zwischenraum; zwischen 3, gibt es 2 Zwischenräume; zwischen 4 gibt es 3 u.

s. w. — Die Anzahl der Zwischenräume ist jedesmal um 1 kleiner als die der Linen, Striche, Körper. — Die Zwischenräume selbst können gleich oder ungleich seyn.

---

6) Vereinigte Linien ins Besondere.

1. Da, wo zwei oder mehre grade Linien zusammentreffen — sich vereinigen — entsteht der Vereinigungspunkt. Fig. 15. — In einem Punkte kann sich, von zwei an, jede Anzahl von Linien vereinigen.

So vereinigen sich in jedem Eckpunkte des Würfels, aller Eckſäulen, der dreiseitigen Spitzsäule, des Vier-, des Rautensechs- und des Zwölfflachs 3 Kanten. In der Spitze der vierseitigen Spitzsäule vereinigen sich 4, in der fünfseitigen 5, in der sechsseitigen, 6 Kanten. Am Sechsflach sind zwei Eckpunkte, in welchen sich 3, und drei Eckpunkte, in welchen sich 4 Kanten vereinigen. In jedem Eckpunkt des Achtflachs kommen 4 Kanten zusammen. Am Rautenzwölfflach sind 6 Eckpunkte, in welchen 4, und sechs andere, in welchen 3 Kanten zusammentreffen. u. s. w.

Forderung. Zeichnet 3, 4, 5 u. ff. Striche, welche sich in einem Punkte vereinigen! Nennet Gegenstände, an welchen sich mehre Linien, Striche, Kanten u. s. in einem Punkte vereinigen! —

2. Zwei grade Linien können sich nur in einem Punkte vereinigen, und alsdann liegen zwei ihrer Endpunkte in dem Vereinigungspunkt, und zwei außer demselben. Drei und mehre grade Linien können sich in mehr als einem Punkte treffen, und zwar:

3 Linien vereinigen sich in 1, 2 oder 3 Punkten. Fig. 28.
4 " " " höchstens in 4 Punkten. " 29.
5 " " " " " 5 " " 30.
6 " " " " " 6 " " 31.

3. Vereinigen sich zwei grade Linien in einem Punkte, und man löscht eine davon weg, so wird dadurch der Vereinigungspunkt zernichtet. — Bei drei Linien, in einem Punkte vereinigt, müssen zwei Linien wegkommen, um den Vereinigungspunkt zu zernichten. Wenn man eine von drei Linien, welche sich in zwei Punkten vereinigen, wegnimmt, wie viele Vereinigungspunkte fallen dadurch weg? u. s. w.

4. Jede von zwei oder mehren graden Linien, welche sich in einem Punkte vereinigen, kann durch den Punkt verlängert werden, d. h. sie kann durch den Punkt gehen. Wenn zwei oder mehre Linien durch den Vereinigungspunkt gehen, so sagt man: Sie durchschneiden sich; und dann heißt der Punkt, in welchem dieses geschieht: Durchschnittspunkt, auch Scheitelpunkt. — Vereinigen sich mehre, etwa 4 grade Linien in einem Punkte, so kann nach und nach jede derselben durch den Vereinigungspunkt geführt werden. So oft eine derselben durchgeführt wird, liegt ein Endpunkt weniger in dem Punkte, und so ist es möglich, daß in dem Punkte nach und nach 4, 3, 2, 1, 0 Endpunkte der Linien liegen.

5. Zwei grade Linien können sich nur in einem Punkte durchschneiden. Taf. 1. Fig. 8. Drei und mehre grade Linien aber können sich in mehr als einem Punkte schneiden, und zwar:

Linien durchschneiden sich in 1, 2 und 3 Punkten, Fig. 28. wenn alle Linien durch die Punkte geführt werden.
" " " " 6 " " 32.
" " " " 10 " " 33.
" " " " 15 " " 34.

Die höchste Anzahl von Durchschnittspunkten, welche eine gewisse Anzahl grader Linien unter einander geben können, findet man so:

Die 2te	Linie	bildet	mit	der	erſten		1	P.
″ 3″	″	″	″		den vorhergehenden		2	″
″ 4″	″	″	″	″	″	″	3	″
″ 5″	″	″	″	″	″	″	4	″
″ 6″	″	″	″	″	″	″	5	″
″ 7″	″	″	″	″	″	″	6	″
″ 8″	″	″	″	″	″	″	7	″
″ 9″	″	″	″	″	″	″	8	″
″ 10″	″	″	″	″	″	″	9	″

Zählt man nun die verſchiedenen Anzahlen von Punkten, 1, 2, u. ff. bis 9 zuſammen, ſo erhält man 45 Punkte, d. i. $5 \cdot 9$ oder $\frac{10 \cdot 9}{2}$. Um alſo ſchnell dieſe Summe zu finden, darf man nur die Anzahl der Punkte, welche die letzte Linie mit allen vorhergehenden bildet, und welche jedesmal um 1 geringer iſt, als die Anzahl der Linien, mit dieſer Anzahl der Linien multipliziren, und das Produkt durch 2 dividiren. Darnach findet man für:

3	Linien	$\frac{3 \cdot 2}{2}$	=	3	Punkte.
4	″	$\frac{4 \cdot 3}{2}$	=	6	″
5	″	$\frac{5 \cdot 4}{2}$	=	10	″
6	″	$\frac{6 \cdot 5}{2}$	=	15	″
7	″	$\frac{7 \cdot 6}{2}$	=	21	″
8	″	$\frac{8 \cdot 7}{2}$	=	28	″
9	″	$\frac{9 \cdot 8}{2}$	=	36	″

$$10 \text{ Linien } \frac{10 \cdot 9}{2} = 45 \text{ Punkte.}$$

$$40 \text{ „ } \frac{40 \cdot 39}{2} = 780 \text{ „ u. s. w.}$$

(Siehe Anhang, Aufgabe 28.) —

6. Zweimal zwei gleichlaufende Linien in einer Ebene bilden höchstens 4 Durchschnittspunkte. Fig. 35. Drei gleichlaufende und 4 gleichlaufende Linien in einer Ebene bilden höchstens 12 Durchschnittspunkte. Fig. 36. Man findet für diese Fälle die höchste Anzahl von Durchschnittspunkten, wenn man die beiden Anzahlen der Linien multiplizirt. So bilden also 7 gleichlaufende und 9 gleichlaufende Linien $7 \cdot 9 = 63$ Durchschnittspunkte. — Zwei gleichlaufende und 4 ungleichlaufende Linien in einer Ebene durchschneiden sich höchstens in 14 Punkten. Fig. 37.; denn jede der gleichlaufenden Linien durchschneidet die 4 ungleichlaufenden in 4, beide also in 8 Punkten; die ungleichlaufenden aber durchschneiden sich in 6 Punken; $8 + 6 = 14$. — (Siehe Anhang, Aufgabe 28.)

---

§. 26. Bewegung.

Eine grade Linie kann bewegt gedacht, und linienförmige Dinge können bewegt werden. Die Bewegung kann geschehen:

1. Der Länge nach, so daß ihre beiden Endpunkte in der Bewegungslinie liegen. So bewegt sich ein abgeschossener Pfeil, der Stempel in Wasserpumpen, der Bogen beim Violinspielen, die Säge beim Holzschneiden; so wachsen die Pflanzen in die Höhe u. s. w.

2. Der Breite nach. So bewegt man z. B. das Lineal beim Ziehen gleichlaufender Striche; so bewegt

sich die vordere Seite der Thüren, Fenster, Läden, die Stangen an Garnwinden u. s. w.

3. Um einen Endpunkt, welcher vestruht. So bewegen sich die obern und untern Seiten an Thüren, Fenster, Läden, die Speichen der Wagen-, Pflug- und Mühlräder, wenn man diese bis in den Drehpunkt verlängert denkt; die Zeiger einer Uhr u. ff.

4. Um den Mittelpunkt, wie der Griff an Handbohrer; oder um einen Punkt, welcher fast in der Mitte liegt, wie die Balken der Scheere, Zange, Zuckerscheere u. s. w.

C. Von den krummen Linien.

1. Die Kreislinie, der Kreisstrich.

§. 27. Anschauung.

Die Kanten des Kegels und der Walze stellen Kreislinien dar. Ebenso sind die Ränder mancher Gefäße, Trinkgläser, Flaschen, — der Röhren, der Wagen-, Pflug- und Mühlräder, Schleifsteine, Rollen, Scheiben, Teller u. s. w. kreisförmig; so erscheint der Umring der Sonne und des Vollmondes als Kreislinie u. s. w. — Nennet noch viele Gegenstände, an welchen sich die Kreislinie darstellt! —

---

§. 28. Entstehen. Nachbilden.

1. Man zeichnet die Kreislinie, und nennt das Zeichen Kreisstrich. Der Kreisstrich wird mit dem Zirkel gezeichnet, indem man denselben um eine gewisse Weite öffnet, die Spitze des einen Fußes vestsetzt, und den andern Fuß so lange um den vestruhenden dreht, bis der mit ihm beschriebene krumme

Strich in sich selbst zurückläuft, und dadurch ein geschlossenes Ganzes bildet. Die Spitze des veststehenden Fußes bildet den Punkt, welcher von dem Kreisstriche allenthalben gleichweit entfernt ist, und deßwegen Mittelpunkt genannt wird. Der bewegte Zirkelfuß beschreibt den Kreisstrich, er ist der beschreibende Fuß. — Um auf dem Felde oder auf sonstigen Ebenen, wo der Zirkel nicht mehr zureicht, einen Kreisstrich zu bilden, bevestigt man einen Faden, Strick, u. s. w. an einem Ende, und dreht denselben so um das bevestigte Ende, daß er stets gleichförmig angespannt ist.

2. Da ein Fuß des Zirkels im Mittelpunkte, nnd der andere in irgend einem Punkte des Kreisstriches sich befindet, so kann man sich zwischen diese beiden Punkte eine grade Linie ab Fig. 38. denken. Da aber der beschreibende Fuß des Zirkels während des Beschreibens in jeden möglichen Punkt des Kreisstriches zu stehen kommt, so ist die Entstehung des Kreisstriches sich auch zu denken, als habe ihn der Endpunkt b der graden Linie ab beschrieben, während sie sich um ihren ruhenden Endpunkt a drehte. Der Endpunkt b ist alsdann der beschreibende.

---

§. 29. Größe, Messen, Vergleichen.

1. Die Kreislinie hat eine bestimmte Größe; und diese hangt von der Größe der graden Linie ab Fig. 38. ab, welche man Halbmesser nennt. Je größer der Halbmesser ist, desto größer ist die Kreislinie, und umgekehrt. Eine Kreislinie kann weder vermehrt noch vermindert werden, weil sie in sich selbst zurückkehrt.

2. Da die Kreislinie allenthalben gleichweit von ihrem Mittelpunkte entfernt ist, so sind alle Halb-

messer derselben einander gleich. Denn während ab Fig. 39. sich um a drehte, kam sie in jede mögliche Lage a zu liegen, und alle Halbmesser: ac, ad, ae u. ff. sind zu betrachten als der eine Halbmesser ab in verschiedenen Lagen um a. — Sind alle Halbmesser gleichgroß, so ist der Durchmesser ce doppelt so groß als der Halbmesser. — Um daher grade Striche, welche sich in einem Punkte vereinigen oder durchschneiden, gleichgroß zu machen, darf man nur den Vereinigungs- oder Durchschnitts-punkt als Mittelpunkt eines Kreisstriches annehmen, und von ihm aus mit beliebiger Zirkelöffnung einen Kreisstrich ziehen, so sind die graden Linien innerhalb desselben gleichgroß.

3. Zwei Kreislinien sind einander gleich, wenn sie beim Aufeinanderlegen sich genau decken. Da aber die Größe des Kreisstriches von der des Halbmessers abhangt, so sind auch Kreislinien einander gleich, wenn sie gleiche Halbmesser haben. Wenn also der Halbmesser der einen Kreislinie 2, 3, 4 u. ff. mal so groß ist, als der einer andern, so wird auch die erste 2, 3, 4 u. ff. mal so groß seyn, als die zweite Kreislinie.

4. Die Größe der Kreislinie mißt man, indem man ihre Länge in grader Richtung bestimmt. Um z. B. den Umring einer Walze, eines Baumstammes u. s. f. zu messen, legt man einen Faden, eine Schnur u. s. f. so um den Gegenstand, daß die messende Länge, das Maß, allenthalben in gleicher Höhe liegt. So verfährt der Drechsler, Mühlbauer, Schneider u. s. w.

§. 30. Theilen.

1. Die Kreislinie kann getheilt werden. Die Theilung derselben geschieht wieder ebenso durch Punkte, welche man sich in ihr denkt, oder in dem Kreisstrich verzeichnet, wie bei der graden Linie. Jeder Theil der Kreislinie ist eine Bogenlinie.

Zu 2 Theilen braucht man 2 Punkte.

" 3. " " " 3 "
" 4 " " " 4 "
" 5 " " " 5 "
" 6 " " " 6 " u. s. w.

Die Anzahl der Theile ist also der Anzahl der Theilungspunkte gleich.

2. Jeder Theilungspunkt liegt mit dem Mittelpunkte in einer graden Richtung, und zwischen beiden Punkten liegt der Halbmesser. Da nun die Lage zweier Punkte die Lage einer graden Linie genau bestimmt; so darf man nur einen Punkt in der Kreislinie bestimmen, um die Lage des Halbmessers genau anzugeben, da der Mittelpunkt der zweite bestimmende Punkt ist.

3. Zwei Theilungspunkte der Kreislinie, welche mit dem Mittelpunkte in einer Richtung liegen, sind zugleich die Endpunkte des Durchmessers; sie liegen einander genau gegenüber, und theilen die Kreislinie in zwei gleiche Theile. Also: Der Durchmesser theilt mit seinen Endpunkten die Kreislinie in zwei gleiche Theile. (Siehe Anhang §. 36.) — Um daher einen Kreisstrich in zwei gleiche Theile zu theilen, darf man nur einen Durchmesser ziehen, d. i. das Lineal so legen, daß es den Mittelpunkt berührt, und der Stift beim Ziehen durch denselben geht.

4. Um den Kreisstrich in vier gleiche Theile zu theilen, darf man nur einen beliebigen Durchmesser ab Fig. 40 ziehen, dann den Punkt c gleichweit von a und b merken, und von ihm einen Durchmesser cd ziehen, so theilen die vier Endpunkte a, b, c und d den Kreisstrich in vier gleiche Theile.

5. Zwei Theilungspunkte der Kreislinie können so liegen, daß die zwischengelegte grade Linie kein Durchmesser wird. cd Fig. 41. Sie heißt alsdann Sehne. Die Sehne wird um so größer, je näher sie dem Durchmesser kommt, und umgekehrt, um so kleiner, je weiter sie sich von demselben entfernt. Der Durchmesser ist daher als die größte Sehne zu betrachten. Je größer also eine Sehne ist, desto näher liegt sie am Mittelpunkte, und je kleiner sie ist, desto weiter liegt sie von ihm entfernt. — Also sind auch zwei und mehre Sehnen, welche gleichweit vom Mittelpunkte entfernt liegen, gleichgroß; und gleichgroße Sehnen liegen gleichweit vom Mittelpunkte entfernt. — (Siehe Anhang §. 37. 38. und 45.).

6. Jede Sehne schneidet von der Kreislinie einen Bogen ab; und dieser wird um so größer, je größer die Sehne ist, also je näher diese dem Mittelpunkte liegt. Gleiche Sehnen schneiden also gleiche Bogen ab, und umgekehrt, zu gleichen Bogen gehören gleiche Sehnen. (Siehe Anhang §. 38.)

7. Der auf ab Fig. 41. senkrechte Durchmesser ik theilt jede der Sehnen cd, ef, und gh in zwei gleiche Theile; und da sein Endpunkt k im vierten Theil der Kreislinie liegt, so liegt er auch in der Hälfte des Bogens: akb, ckd, ekf und gkh. Der auf einer Sehne senkrechtstehende Halb- oder

Durchmesser theilt also diese Sehne und den dazu gehörigen Bogen in zwei gleiche Theile. Umgekehrt: Die auf der Mitte einer Sehne senkrecht stehende grade Linie geht durch den Mittelpunkt, ist also ein Halb- oder Durchmesser. (Siehe Anhang §. 42. 43. und 44.).

8. Um also einen Bogen in zwei gleiche Theile zu theilen, darf man nur die dazugehörige Sehne in zwei gleiche Theile theilen, und durch ihren Theilungspunkt den Halb- oder Durchmesser ziehen. So kann man also die Kreislinie und den Kreisstrich in 2, 4, 8, 16 u. s. w. Theile theilen.

9. Den Halbmesser kann man sechsmal auf dem Umringe des Kreises abstechen (Siehe Anhang §. 31.); also schneidet derselbe als Sehne den sechsten Theil der Kreislinie ab. Fig. 42. Es ist daher jeder Bogen bc, cd, de, ef und ff. ein Sechstel des Kreisstriches; und der Bogen acd, def und fgb ein Drittel desselben. Also kann man leicht den Kreisstrich in: 2, 3, 4, 6, 8, 12 u. ff. Theile theilen. Die übrigen Theilungen in 5, 7, 9, 10, 11 u. s. w. Theile ist schwieriger, und man bedient sich dazu des Transporteurs, d. i. des Bogen- und Winkelmessers Fig. 43. Man hat nämlich den ganzen Umring des Kreises in 360 Theile getheilt, welche Grade heißen (360°); daher ist:

Die Hälfte desselben $\frac{360}{2} = 180°$

Das Drittel " $\frac{360}{3} = 120°$

" Viertel " $\frac{360}{4} = 90°$

" Fünftel " $\frac{360}{5} = 72°$

Das Sechstel desselben $\frac{360}{6} = 60°$

„ Siebentel „ $\frac{360}{7} = 51\ 3/7°$

„ Achtel „ $\frac{360}{8} = 45°$

„ Neuntel „ $\frac{360}{9} = 40°$

„ Zehntel „ $\frac{360}{10} = 36°$ u. s. w.

Will man nun z. B. einen gegebenen Kreisstrich in eine gewisse Anzahl gleicher Theile theilen, so verfährt man auf folgende Weise: Man legt den Bogenmesser so auf den zu theilenden Kreisstrich, daß der Punkt a Fig. 43. genau auf dem Mittelpunkte des Kreises liegt, welcher getheilt werden soll, sticht sich am Umringe des Bogenmessers zwei Punkte ab, welche z. B. 72° von einander entfernt sind, zieht vom Mittelpunkte zwei grade Linien nach den zwei bemerkten Punkten, und faßt die Entfernung der beiden Durchschnittspunkte, welche die beiden gezogenen graden Linien mit dem Kreisstriche bilden, zwischen den Zirkel, und trägt dieselbe so oft auf den Kreisstrich, als es sich thun läßt, was im gegenwärtigen Falle fünfmal geschehen kann, da 72° das Fünftel des Kreisstriches ist. — Von dem weitern Gebrauche dieses Werkzeuges wird später noch geredet werden.

---

§. 31. Lage.

1. Zwei Kreislinien können in einer, oder in verschiedenen Ebenen liegen.

2. Liegen sie in einer Ebene, so liegen sie in einander, d. i. so, daß eine die andere umschließt,

Fig. 44—46. oder sie liegen außer einander d. i. so, daß keine die andere ganz umschließt. Fig. 47—49.

3. Liegen sie ineinander, so können sie einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, Fig. 44. sie sind gleichlaufend, und man sagt von ihnen, sie sind concentrisch. Die Entfernung ihrer Mittelpunkte ist gleich o. — Oder sie haben verschiedene Mittelpunkte, und sind alsdann excentrisch. In letzterm Falle können sie sich berühren, und bilden einen Berührungspunkt. Fig. 46; die Entfernung ihrer Mittelpunkte ist dem Unterschiede ihrer Halbmesser gleich; — oder sie berühren sich nicht, in welchem Falle die Entfernung ihrer Mittelpunkte kleiner ist, als der Unterschied ihrer Halbmesser. Fig. 45.

4. Liegen zwei Kreislinien auseinander, so ist dieses entweder ganz, oder zum Theil der Fall. Im ersten Falle haben sie gar keinen Punkt mit einander gemein, wie Fig. 47., und sind alsdann getrennt, die Entfernung ihrer Mittelpunkte ist größer, als die Summe ihrer Halbmesser; — oder sie berühren sich, und bilden einen Berührungspunkt. Fig. 48. Die Entfernung ihrer Mittelpunkte ist der Summe ihrer Halbmesser gleich. Im zweiten Falle, wo sie nur zum Theil außer- oder ineinander liegen, durchschneiden sie sich in zwei Punkten, Fig. 49, und die Entfernung ihrer Mittelpunkte ist kleiner, als die Summe ihrer Halbmesser.

5. Liegen zwei Kreislinien in verschiedenen Ebenen, wie dieses der Fall ist bei den Kanten einer Walze, den Rändern einer Röhre u. ff. so sind sie entweder gleichlaufend oder ungleichlaufend; sie sind getrennt oder vereinigt; sie berühren oder durchschneiden sich. — Ueber die höchste Anzahl der Durchschnittspunkte, welche

Kreislinien in einer Ebene bilden können, siehe Anhang, Aufgabe 27.). —

---

§. 32. Bewegung.

Eine Kreislinie kann bewegt gedacht werden: 1) Um ihren Mittelpunkt. So bewegt sich der Umring eines Mühlrades, die Endkanten der rundgedrehten Hölzer auf der Drehbank, der Rand des Schleifsteins, der Rollen, u. s. w. 2) Um einen ihrer Durchmesser. 3) Auf ihrem Umringe und zugleich um ihren Mittelpunkt, wie das Wagen- und Pflugrad, die Kanten der Ackerwalze, u. s. w. 4) So, daß sie beständig in eine andere Ebene zu liegen kommt, wie die Kanten eines in einer Röhre hin und hergeschobenen Stempels, in einander geschobener Röhre, in einen Brunnen gelassenen Eimers u. s. w.

---

2) Die Bogenlinie.

§. 33. Eigenschaften.

1. Die Bogenlinie ist ein Theil der Kreislinie; sie hat eine Ausdehnung und zwei Endpunkte. Außer diesem ist an ihr die hohle und erhabene Seite zu unterscheiden. Die Biegung der Bogenlinie nennt man Wölbung. — Der Himmel wölbt sich über uns; an Brücken, in Kirchen und an mehren andern Gebäuden kommen Gewölbe vor.

2. Die Stärke der Biegung einer Bogenlinie ist verschieden, jenachdem dieselbe Theil einer größern oder kleinern Kreislinie ist. So ist die Biegung der Bogenlinie bc Fig. 50. stärker, als die des Bogens de. Je größer also die Kreislinie, desto flacher sind ihre

Bogen, und umgekehrt. — Ferner ist der Bogen über gh Fig. 41. flacher, als die über ef, cd und ab. Also: Die Wölbung eines Bogens ist um so stärker, ein je größerer Theil der Kreislinie er ist. Gleichgroße Bogen einer und derselben Kreislinie müssen daher gleiche Biegung haben.

§. 34. Größe.

Die Bogenlinie hat eine gewisse Größe, — sie kann gemessen werden, wie die Kreislinie. Ihre Größe kann bestimmt werden nach der Kreislinie, von welcher sie Theil ist; daher gibt es unter den Bogenlinin: Halb-, Drittel-, Viertel- u. s. w. Kreise. — Mißt man die Bogenlinie auf einer graden, so ist der Halbkreis einer kleinern Kreislinie kleiner, als der einer größern u.s.w.

§. 35. Vergrößern und Verkleinern.

1. Die Bogenlinie kann vergrößert werden bis zur vollen Kreislinie, und nicht weiter. Ihre Vergrößerung kann also nicht ins Unendliche gedacht werden, wie bei der graden Linie. Je kleiner aber die anfängliche Bogenlinie ist, desto mehr kann sie vergrößert werden.

2. Soll ein Bogenstrich ab Fig. 51. vergrößert werden, so muß man zuerst den Mittelpunkt des Kreisstriches kennen, von welchem er Theil ist. Diesen findet man aber, indem man in den gegebenen Bogenstrich zwei Sehnen ac und bc legt, jede derselben in zwei gleiche Theile theilt, und von jedem Theilungspunkte e und d eine senkrechte grade Linie zieht. Der Durchschnittspunkt derselben ist der Mittelpunkt des Kreis-

striches. Man setzt nun den einen Zirkelfuß in m, nimmt ma oder mb als Halbmesser, und vergrößert. (Siehe Anhang, §. 44. und Aufgabe 12.)

3. Das Verkleinern der Bogenlinie geschieht durch das Wegnehmen eines Theils derselben, und bietet nichts besonders Merkwürdiges dar.

---

§. 36. Theilen.

Die Theilung der Bogenlinie ist von der der Kreislinie dadurch verschieden, daß nicht die Anzahl der Theile mit der Anzahl der dazu nöthigen Theilungspunkte einerlei ist, sondern daß, wie bei der Theilung der graden Linie, die erste Anzahl die zweite um 1 übertrifft. — Uebrigens ist die Art der Eintheilung der Bogenlinie ganz dieselbe, wie die der Kreislinie. (Siehe übrigens Anhang §. 48. und Aufgabe 5.). —

---

§. 37. Lage.

1. Die Lage einer Bogenlinie wird nach ihrer Biegung bestimmt. Sie ist in dieser Hinsicht: 1) Aufgebogen, aufwärtsgebogen, wenn die erhabene Seite nach oben gekehrt ist ab Fig. 52. — 2) Abgebogen, abwärtsgebogen, wenn die erhabene Seite unten liegt, de. In beiden Fällen liegt die grade Linie, welche ihre Endpunkte verbindet, wagrecht. — 3) Rechtsgebogen, wenn die erhabene Seite rechts liegt, ad. 4) Linksgebogen, wenn die erhabene Seite links liegt, be. In beiden Fällen liegt die zugehörige Sehne senkrecht. — 5) Rechts aufgebogen, ac; 6) rechts abgebogen, dc; 7)

links aufgebogen, bc; 8) links abgebogen, ce. In allen vier Fällen liegt die zugehörige Sehne schief.

2. Zwei oder mehre Bogenlinien liegen in einer oder in verschiedenen Ebenen. Liegen sie in einer Ebene, so sind sie getrennt oder vereinigt. Die getrennten Bogenlinien liegen gleichlaufend, Fig. 50. und sind dann Theile concentrischer Kreise; — oder ungleichlaufend; — oder in einerlei Umring, Fig. 53. und sind dann Theile einer und derselben Kreislinie.

3. Bogenlinien, welche zusammenstoßen, bilden Vereinigungs-, Berührungs- oder Durchschnittspunkte, und zwar:

2	Bogenl.	bilden	2	Vp.	1	Berp.	2	Durchschntp.
3	"	"	3	"	3	"	6	"
4	"	"	4	"	6	"	12	"
5	"	"	5	"	8	"	20	"
6	"	"	6	"	11	"	30	" u. s. w.

Die Figuren zu diesen Fällen sind leicht zu zeichnen; auch wird der Lehrer nicht ermangeln, dieselben von seinen Schülern auf die Tafel zeichnen zu lassen.

4. Bogenlinien von verschiedener Lage, oder von verschiedener Stärke ihrer Biegung können an ihren Endpunkten zusammenstoßen, und bilden alsdann die zusammengesetzten krummen Linien: Das Langrund oder die Ellipse, Fig. 54.; die Eilinie, Fig. 55., die Schlangenlinie, Fig. 56.; die Wellenlinie, Fig. 57.; die Spirallinie, Fig. 58.; und die Schneckenlinie, Fig. 59. —

5. Um eine Ellipse zu ziehen, theilt man eine grade Linie ab Fig. 54. in drei gleiche Theile: ac, cd und db, beschreibt aus c und dann aus d mit Zirkelöffnung ac eine Kreislinie, zieht alsdann aus

e die Durchmesser eg und eh, ebenfalls aus f die Durchmesser fi und fk, und beschreibt:

Aus e mit eg den Bogen gh, und
" f " " " " ik,

so ist in dem äußersten Umfange die Ellipse, das Langrund verzeichnet. Die Ellipse besteht also aus vier Bogenlinien, welche sich an ihren Endpunkten treffen. — So ist der Umfang mancher Pflanzenblätter gestaltet; die Kante der Endfläche eines schief durchschnittenen Baumstammes, Pflanzenstengels, des Kegels, einer Walze, u. s. w. stellt das Langrund dar.

6. Um die Eilinie zu zeichnen, zieht man aus m Fig. 55. mit am beliebig einen Kreis, zieht die beiden Durchmesser ab und cd so, daß sie sich senkrecht schneiden, zieht alsdann ac und bc, und verlängert sie über c hinaus, und beschreibt alsdann folgende Bogen:

Aus b mit ba den Bogen ae;
" a " " " bf;
" c " ee " " ef;

so stellt der äußerste Umfang die Eilinie, das Eirund oder Oval dar. Dasselbe besteht also wieder aus vier Bogenlinien, welche sich an ihren Endpunkten treffen. So ist der Umfang des Eies und aller eiförmigen Gegenstände gestaltet.

7. Will man eine Schlangenlinie zeichnen, so trägt man auf eine beliebige grade Linie gh Fig. 56. eine beliebige Anzahl gleicher Theile, und zieht dann folgende Halbkreise:

Aus a mit ga nach oben;
" b " " " unten;
" c " " " oben;
" d " " " unten;
" e " " " oben;
" f " " " unten u. s. w.

Die Schlangenlinie besteht aus Halbkreisen, welche sich an ihren Endpunkten treffen. Der Name ist von der Schlange entlehnt, welche ähnliche Windungen macht, wenn sie sich fortbewegt. — In dieser Form erscheinen die Flüsse, Bäche, Thäler, Bergreihen, Fußwege und Heerstraßen u. s. w. Auch sagt man von diesen Gegenständen: Sie schlängeln sich.

8. Um eine Wellenlinie zu zeichnen, zieht man drei gleichlange, gleichlaufende Linien ab, cd und ef Fig. 57. Taf. III. und in gleicher Entfernung, so daß ihre Endpunkte in senkrechten Linien über einander liegen; theilt jede in die gleiche Anzahl gleicher Theile, etwa in 12, zieht ag, und zieht nun mit der Zirkelöffnung von ag abwechselnd folgende Bogen:

Aus g nach oben;
" h " unten;
" i " oben;
" k " unten;
" l " oben;
" m " unten u. s. w.

Die Wellenlinie besteht also aus ganz flachen Bogen, welche sich an ihren Endpunkten treffen. — So erscheinen die sanften Wellen des Wassers; so ist die Oberfläche einer hügeligen Landfläche wellenförmig, auch werden nach dieser Form die Theile im Flechtwerk zusammengesetzt. — Wo die Schlangen- und Wellenlinie unregelmäßig vorkommt, da gebraucht man den Ausdruck: Kräuseln, gekräuselt, kraus. So kräuselt sich das Haar, die Wolle, der Rand mancher Pflanzenblätter; die Oberfläche des Wassers wird vom sanften Lufthauche gekräuselt — Die Wurmform ist die Schlangen- oder Wellen-

form solcher Gegenstände, welche etwas dick sind; so gibt es wurmförmige Wurzeln u. ff.

9. Um eine Spirallinie zu zeichnen, nimmt man zwei Punkte a und b beliebig in einer graden Linie hk Fig. 58. an, und beschreibt alsdann abwechselnd folgende Halbkreise:

Aus a mit ab nach oben;
" b " bc " unten;
" a " ad " oben;
" b " be " unten;
" a " af " oben;
" b " bg " unten;
" a " ah " oben u. s. w.

Die Spirallinie besteht also aus immer größern Halbkreisen von abwechselnder Lage, welche sich an ihren Endpunkten treffen. — So erscheinen die Spiralfedern in Uhrwerken, in Sophas; die Strohgewinde der Strohhüte; die ächten Farrnkräuter beim Aufschießen; manche Schneckengehäuse (besonders die des Geschlechtes Planorbis) u. ff.

10. Um eine Schneckenlinie zu zeichnen, bestimmt man in einer graden Linie ik Fig. 59. beliebig einen Punkt a, und trägt von diesem aus auf beide Seiten gleichviele und gleiche Theile, beschreibt aus a mit ab einen Kreis, und dann abwechselnd auf beiden Seiten der graden Linie folgende Halbkreise:

Aus c mit bc nach unten;
" d " de " oben;
" g " gf " unten;
" h " hi " oben u. s. w.

11. Noch ist hier der Kettenlinie zu gedenken. So nennt man nämlich alle diejenigen krummen Linien, welche von dem durch seine eigene Schwere

frei gebogenen, an beiden Enden bevestigten Strick gebildet werden. In dieser Linie erscheinen die Ankertaue, Schiffsseile, Laternen- und Fährseile; die Schnurgehänge von Gold, Seide, Perlen, Bänder, Blumen; die Ketten u. s. w.

12. Bei den bisher betrachteten Schlangen-, Wellen-, Spiral- und Schneckenlinien lagen alle vereinigten Bogenlinien in einer und derselben Ebene. Das ist aber nicht überall der Fall, sondern häufig erscheinen Gegenstände in einer oder in der andern Linie, doch so, daß jeder Bogen in einer besondern Ebene liegt; alsdann sagt man von diesen Gegenständen: Sie winden sich. Dieses ist der Fall bei den Stängeln der Bohnenpflanzen, den Winden u. s. w. Eine so gestaltete Linie heißt Schraubenlinie. Am regelmäßigsten kommt die Schraubenlinie an den Schrauben, an den Kork- und Kugelziehern vor, doch auch ferner an Schneckengehäusen (besonders bei den Kegelschnecken), an gewundenen Säulen auf Altären; die Haarlocken; Seile und Stricke aus Flachs, Hanf und Baumbast-Fäden sind durch Spinnen und Zwirnen gewunden; Spiral- und Wendeltreppen, besonders in Thürmen, viele Blasinstrumente, Blumengewinde um Säulen u. s. w. gehören hierher. Epheuranken und der Stengel der Heckenkirsche schneiden oft in Baumstämmchen, um welche sie sich winden, die Schraubenform ein. Auch andern Körpern schneidet man die Schraubenform ein, und nennt sie alsdann selbst eine Schraube Fig. 60. und gebraucht sie alsdann, wie bei der Kelter und dem Bohrer u. s. w. Ein Umlauf der Schraube heißt Windung, und alle Windungen zusammen, das Gewinde. Schneidet man die Schraubenform einer runden Oeffnung ein, so daß darin die Schraube ein-

geschraubt werden kann, so entsteht die Schraubenmutter. — Die grade Linie, welche man sich durch die Mitte aller Schraubenwindungen denkt, oder der gradlinige Körper, um welchen sich die Windungen drehen, heißt Spindel. So gibt es Treppen mit Spindeln u. s. w.

IV. Von den Winkeln.

§. 38. Anschauung. Theile.

1. Zwei Linien, Kanten u.ff., welche sich in einem Punkte vereinigen, bilden da, wo sie sich zu einander neigen, einen Winkel. — Ein Winkel ist also die Neigung zweier Linien zu einander. Linien, welche keine Neigung zu einander haben, können auch keine Winkel bilden. — Alle Kanten des Würfels, der Eck- und Spitzsäulen u. s. w. neigen sich zu einander, und bilden daher Winkel. So bildet ein aufrechtstehender Stab mit der Grundfläche, der Ast mit dem Stamme, ein Nebenfluß mit dem Hauptflusse, ein Seitenweg mit dem Hauptwege, in den er führt, Winkel u. s. w.

2. Die Theile eines jeden Winkels sind:

1) Die Schenkel d. i. die Linien, von welchen der Winkel gebildet ist. Ein jeder Winkel muß nothwendig zwei Schenkel haben: ab und bc Fig. 61.

2) Der Winkelpunkt, d. i. derjenige Punkt, in welchem die Schenkel des Winkels zusammentreffen: a Fig. 61.

3) Die Oeffnung des Winkels oder der unbegrenzte Theil des Winkels: Zwischen b u. c Fig. 61.

4) Die Spitze des Winkels oder die Ecke, d. i. der Theil des Winkels, welcher der Winkelöffnung gegenüber liegt: a Fig. 61.

---

§. 39. Art.

1. Durch die Neigung zweier Linien zu einander entsteht der Linienwinkel; durch die Neigung zweier in zwei ihrer Seiten vereinigter Flächen entsteht der Flächen- oder Kantenwinkel; durch das Zusammentreffen von wenigstens drei Flächen entsteht der Körperwinkel. — So finden sich am Würfel 24 Linienwinkel, 12 Flächen- oder Kantenwinkel und 8 Körperwinkel. — Wir sprechen hier vom Linienwinkel.

2. Nach der Art der Linien, wodurch ein Winkel gebildet wird, erhält derselbe besondere Namen. Er ist nämlich:

1) Gradlinigter Winkel, wenn seine beiden Schenkel grade Linien sind. Fig. 61.

2) Krummlinigter Winkel, wenn seine beiden Schenkel krumme Linien sind. Fig. 62.

3) Gemischtlinigter Winkel, wenn einer seiner beiden Schenkel eine grade, der andere eine krumme Linie ist. Fig. 63.

---

§. 40. Bildung. Zeichnen.

Um einen Winkel zu bilden, braucht man zwei Linien; — es ist aber unmöglich, mit 3, 4 u. s. f. Linien nur einen Winkel zu bilden. Wenn sich nun zwei Linien in einem Punkte treffen, so bilden sie mit einander nach und nach 1, 2 und 4 Winkel, je nachdem eine oder beide Linien durch den Punkt gezogen

werden. Drei Winkel sind aber unmöglich zu bilden. — Zur Uebersicht und Uebung diene folgende Tafel:

	Anzahl der Linien		Anzahl der Punkte.	Mögliche Anzahl der Winkel.	Unmögliche Anzahl der Winkel.	Fig.
	grade.	krumme.				
1)	2		1	1 bis 4	3	
2)	1	1	1	1 bis 4	3	
			2	2 — 8	7	
3)		2	1	wie No. 1.		
			2	" " 2.		
4)	3		1	2 bis 6		
			2	2 — 8	7	
			3	3 — 12	11	
5)	2	1	1	wie No. 4.		
			2	3 bis 10		64.
			3	4 — 14		65.
			4	6 — 16	15	66.
			5	10 — 20	19	67.
6)	1	2	1	wie No. 4.		
			2	2 bis 10		
			3	wie No. 5.		
			4	6 bis 18		68.
			5	wie No. 5.		
			6	14 bis 24	23	
		3	1	wie No. 4.		
			2			
			3			
			4	wie No. 6.		
			5	wie No. 5.		
			6	wie No. 6.		

Die weitere Ausführung mit 4, 5 Linien wird dem Lehrer überlassen, so wie das Aufsuchen der zu dieser Tafel gehörigen Figuren, welche auf den angehängten Figuren-Tafeln nicht gezeichnet sind. — (Ue-

her die höchste Anzahl von Winkeln, welche eine gegebene Anzahl grader Linien bilden können, siehe Anhang, Aufgabe 33.).

---

§. 41. Lage.

1. Zwei und mehre Winkel liegen in einer, oder in verschiedenen Ebenen. — So liegen an jeder Fläche des Würfels 4 Winkel in einer Ebene; an jeder Fläche des Zwölfflachs liegen 5, an jeder Endfläche der sechsseitigen Eckſäule 6 Winkel in einer Ebene u. s. f. — Um die Spitze der dreiseitigen Spitzsäule liegen 3, um die der vierseitigen 4, um die der fünfseitigen 5, um die der sechsseitigen 6 Winkel in eben so vielen verschiedenen Ebenen.

2. Zwei und mehre Winkel, sie mögen in einer oder in verschiedenen Ebenen liegen, haben mit einander gemein:

1) Einen Schenkel ganz, oder zum Theil. So haben mit einander gemein Fig. 69.:

In No. 1. die W. bac und abd den Schenkel ab.
" " 2. " " abd " bac " " ab.
" " 3. " " bac " gdc das Schenkelstück dc.
" " 4. " " bac " gdf " " ad.
" " 5. " " bac " gdc " " dc.
" " 6. " " bac " gdf " " ad.

In No. 1. sind die Winkel bac und abd innere Gegenwinkel.

In No. 2. sind die Winkel bac und abd innere Wechselwinkel.

In No. 4. sind die Winkel baf und gdc äußere Gegenwinkel.

In No. 6. sind die Winkel fdb und gac äußere Wechselwinkel.

In No. 3 sind die Winkel bad und gdc innere und äußere Gegenwinkel.

In No. 5. sind die Winkel bad und gdc innere und äußere Wechselwinkel.

Was für Winkel der Lage nach kommen in Fig. 69. No. 4 und 6 vor?

2) Blos den Winkelpunkt. Fig. 70. Fallen dabei blos zwei Schenkel in eine grade Linie, wie No. 2., so heißen die Winkel ihrer Lage nach Nebenwinkel einer Linie. — Fallen aber zwei und zwei Schenkel derselben in eine grade Linie, wie in No. 3, so sind die Winkel bac und dag, so wie die Winkel bad und gac Scheitelwinkel. — So liegen an jedem Eckpunkt des Achtflachs zwei Winkel einander gegenüber, welche nur den Winkelpunkt gemein haben.

3) Einen Schenkel und den Winkelpunkt. Fig. 71. — So liegen je zwei Winkel am Eckpunkte des Würfels.

4) Einen Schenkel zum Theil, und einen Schenkelpunkt Fig. 72. wo für den Winkel bac und bdg das Schenkelstück bd und der Schenkelpunkt m gemein ist.

5) Blos zwei Schenkelpunkte. Fig. 73. In diesem Falle können die beiden Punkte, welche sie gemein haben, zugleich die Endpunkte ihrer Schenkel seyn, wie Fig. 19. Taf. I. wo die Winkel bac und bdc die Punkte b und c gemein haben. — So liegen zwei gegenüberliegende Winkel an jeder Fläche des Würfels, an den Seitenflächen der Eckſäulen u. ſ. w.

6) Weder einen Schenkel, noch irgend einen Punkt. Die Winkel liegen alsdann ganz außer einander, sie sind getrennt.

3. Ein Winkel kann im Kreisstriche liegen und zwar:

1) Mit dem Winkelpunkte im Mittelpunkte des Kreises, und er heißt alsdann Mittelpunktswinkel. Fig. 74.

2) Mit seinem Winkelpunkte im Kreis-Umring, und mit seinen Schenkeln auf dem Halbkreis Fig. 75. No. 1. — oder auf einem Bogen, welcher kleiner als der Halbkreis, No. 2. — oder endlich auf einem Bogen, welcher größer als der Halbkreis ist. No. 3. In allen drei Fällen heißt er Umfangswinkel.

---

§. 42. Größe.

1. Größe des Winkels im Allgemeinen. Vergrößern und Verkleinern.

1. Der Winkel hat eine Größe; und diese besteht einzig in der größern oder geringern Neigung seiner Schenkel zu einander. Ob nun seine Schenkel lang oder kurz sind, das ändert die Neigung derselben zu einander nicht, und daher auch nicht seine Größe. Man darf also sagen, daß die Größe des Winkels einzig von der Neigung seiner Schenkel abhangt.

2. Soll der Winkel vergrößert oder verkleinert werden, so muß man den zwischen den Schenkeln liegenden Zwischenraum vergrößern oder verkleinern, d. i. man muß machen, daß sich die Schenkel desselben mehr von einander entfernen oder einander nähern. Dieses kann sehr einfach versinnlicht werden durch die Bewegung der beiden Zirkelfüße, der Scheerbalken, durch die Bewegung der obern oder untern Linie einer Thüre, eines Fensters u. s. w. bei dem Oeffnen und Verschließen derselben.

3. Man kann einen Winkel um ein bestimmtes Stück vergrößern oder verkleinern. So ist z. B. der Winkel dag Fig. 70. No. 1. um das Stück cad vergrößert worden, wenn der Schenkel ad nach ac bewegt wurde; ebenso wäre der Winkel bag um das Stück bac verkleinert, wenn der Schenkel ba nach ca bewegt würde.

---

2. Messen des Winkels.

1. Da der Winkel eine Größe hat, so kann er gemessen werden. Man mißt den Winkel durch das Winkelmaß, durch den Winkelmesser. Um einen Winkel zu messen, betrachtet man ihn als Mittelpunktswinkel, und mißt alsdann durch den Winkelmesser den Bogen, auf welchem er in diesem Falle stände. Die Größe der Bogen ist aber auf dem Winkelmesser in Graden angegeben, daher gibt es Winkel von 3°, 4°, 5°, 20° u. s. w.

2. Soll nun ein Winkel, z. B. bac Fig. 61. No. 3. gemessen werden, so verlängert man den Schenkel ab hinlänglich, legt alsdann den Winkelmesser so auf den zu messenden Winkel, daß der Mittelpunkt a Fig. 43. Taf. II. genau auf dem Winkelpunkt, und die Linie ac des Winkelmessers genau auf dem Schenkel ac liegt, und merkt sich alsdann den Grad des Winkelmessers, in welchen der Schenkel ab verlängert trifft. Man wird alsdann für den gegenwärtigen Winkel 106 1/2 Grad, d. i. 106 Grad 30 Minuten (106° 30′) finden. — Zum Messen der Winkel auf dem Felde bedient man sich des Meßtisches.

3. Um einen Winkel, dessen Größe in Graden angegeben ist, z. B. einen Winkel von 64° zu zeich-

nen, verfährt man auf folgende Weise: — Man zieht beliebig eine grade Linie, und merkt sich darin den Winkelpunkt des zu ziehenden Winkels, dessen einer Schenkel in diese Linie zu liegen kommt. Dann legt man wieder den Winkelmesser so, daß der Mittelpunkt desselben genau auf dem gemerkten Winkelpunkte, und die Linie ac desselben genau auf der erstgezogenen Linie liegt, zählt von c des Winkelmessers 64° ab, und bemerkt sich diesen Punkt, verbindet ihn dann mit dem anfänglich gemerkten Winkelpunkte durch eine grade Linie, so ist der verlangte Winkel verzeichnet.

---

3. Art des gradlinigten Winkels, durch die Größe desselben bedingt.

1. Die Größe des Winkels wird bestimmt durch den Bogen, auf welchem er als Mittelpunktswinkel steht. Ein Winkel, welcher als Mittelpunktswinkel auf dem Viertelkreis, d. i. auf einem Bogen von 90° steht, ist ein rechter Winkel. Fig. 61. No. 1. In diesem Falle steht ein Schenkel senkrecht auf dem andern. — Ein Winkel, welcher als Mittelpunktswinkel auf einem Bogen von weniger als 90° steht, ist ein spitzer Winkel; Fig. 61. No. 2. — steht er aber auf einem Bogen von mehr als 90°, so ist er ein stumpfer Winkel. Fig. 61. No. 3. In beiden Fällen steht ein Schenkel schief auf dem andern; man nennt daher auch den rechten Winkel, einen graden, den spitzen und stumpfen aber schiefe Winkel. — Wird der rechte Winkel kleiner, so wird er spitz; wird er größer, so wird er stumpf. In beiden Fällen hört er auf, ein rechter Winkel zu seyn. Der rechte Winkel ist also ein Winkel von beständiger Größe,

d. i. er hat immer dieselbe Größe, er kann seine Größe nie ändern, er bleibt sich immer gleich. Also: Alle rechte Winkel sind einander gleich. — Weil der rechte Winkel von beständiger Größe ist, darum dient er auch als Maß und Vergleichgröße für die spitzen und stumpfen Winkel.

2. Um einen oder zwei rechte Winkel zu zeichnen, darf man nur eine grade Linie senkrecht auf eine andere ziehen. Das aber ist nicht so leicht. Man kann dieses mit dem Winkelmesser, mit dem Winkelhaken und mit dem Zirkel. Man verfährt dabei wie folgt:

1) Mit dem Winkelmesser.

Man zieht eine grade Linie, merkt sich in derselben den Winkelpunkt, legt den Mittelpunkt des Winkelmessers an diesen Punkt, und eine Seite desselben genau längs der gezogenen Linie, sticht an dem Orte, wo auf dem Winkelmesser der Theilstrich für 90° steht, einen Punkt in das Papier, und verbindet diesen Punkt mit dem Winkelpunkte durch eine grade Linie, so steht dieselbe auf der erstgezogenen Linie senkrecht. Man hat alsdann einen oder zwei rechte Winkel.

2) Mit dem Winkelhaken. Fig. 76.

Man zieht längs der beiden Kanten desselben ab und ac, zwei grade Linien, so bilden diese in ihrem Vereinigungspunkte einen rechten Winkel. — Ist die grade Linie schon gezogen, auf welche eine senkrechte gestellt werden soll, etwa ac, so legt man eine Kante des Winkelhakens längs dieser Linie, und zieht längs der andern hin.

Um zu untersuchen, ob ein Winkelhaken richtig gearbeitet sey, zieht man z. B. auf einer Seite der Linie ao einen Winkel, und alsdann einen solchen auf der andern

Seite derselben. Fallen nun die beiden Schenkel ab und ad in eine grade Linie, so ist der Winkelhaken richtig gearbeitet.

3) Mit dem Zirkel.

a) Man beschreibt einen Kreis, zieht einen Durchmesser, theilt den Halbkreis in zwei gleiche Theile und verbindet den Theilungspunkt mit dem Mittelpunkte durch einen Halb- oder Durchmesser, so entstehen 2 oder 4 rechte Winkel. Fig. 40. Taf. II.

b) Man ziehe mn Fig. 77. Taf. IV. schneide von o aus ao=bo, beschreibe aus a mit ab und aus b mit ba die beiden Bogen c, ziehe alsdann co, so entstehen bei o zwei rechte Winkel. (Anhang §. 47 und Aufgabe 2 und 3.).

c) Man beschreibe beliebig einen Kreis, ziehe einen Durchmesser, sodann von den Endpunkten desselben zwei Sehnen, welche sich in irgend einem Punkte des Umrings treffen, so bilden diese beiden Sehnen in ihrem Winkelpunkte einen rechten Winkel. Fig. 75. No. 1. Taf. III. (Anhang §. 41.).

d) Wenn auf irgend einen Punkt der Linie ab Fig. 78. Taf. IV. eine andere senkrecht gezogen werden soll, so wählt man außerhalb der Linie einen Punkt c und beschreibt aus demselben als Mittelpunkt einen Bogen, welcher die Linie ab in zwei Punkten schneidet, halbirt alsdann de und zieht cf, so entstehn bei f rechte Winkel, und cf steht senkrecht auf ab. (Anhang §. 42. 43. und 44. — Aufgabe 2.).

3. Ueber die Art der Winkel, welche sich mit einer gewissen Anzahl von Linien bilden lassen, die in einer gewissen Anzahl von Punkten zusammentreffen, siehe die folgende Tabelle.

Anzahl der Linien.	Anzahl der Punkte.	Anzahl der Winkel.	Rechte W.	Spitze Winkel.	Stumpfe Winkel.
2	1	1	1	0	0
			0	1	0
			0	0	1
		2	2	0	0
			0	1	1
		4	4	0	0
			0	2	2
3	1	2	1	1	0
			0	2	0
			0	1	1
		3	1	2	0
			1	0	2
			0	3	0
			0	2	1
			0	1	2
		4	2	1	1
			0	2	2
		5	3	2	0
			1	3	1
			0	4	1
			0	3	2
		6	2	4	0
			0	6	0
			0	4	2
	2	2	2	0	0
			1	1	0
			1	0	1
			0	2	0
			0	1	1
			0	0	2
		3	3	0	0
			2	1	0
			2	0	1
			1	2	0
			0	1	1
			0	0	2
		4	4	0	0
			2	1	1
			0	2	2
		5	5	0	0
			4	1	0
			4	0	1
			1	2	2
			0	3	2
			0	2	3

Anzahl der Linien.	Anzahl der Punkte.	Anzahl der Winkel.	Rechte Winkel.	Spitze Winkel.	Stumpfe Winkel.
3	2	6	6	0	0
			4	1	1
			2	2	2
			0	3	3
		8	8	0	0
			4	2	2
			0	4	4
	3	3	1	2	0
			0	3	0
			0	2	1
		4	2	2	0
			1	2	1
			0	3	1
			0	2	2
		5	2	2	1
			1	2	2
			0	3	2
			0	2	3
		6	4	2	0
			2	2	2
			1	3	2
			0	4	2
			0	3	3
		7	4	2	1
			2	3	2
			1	3	3
			0	4	3
			0	3	4
		8	4	2	2
			2	3	3
			0	4	4
		9	4	3	2
			1	4	4
			0	5	4
			0	4	5
		10	4	3	3
			2	4	4
			0	5	5
		12	4	4	4
			0	6	6

Die weitere Ausführung mit 4, 5, u. ff. Linien, so wie das Zeichnen der zu dieser Tafel gehörigen Figuren, überlasse ich dem Lehrer.

4. Wenn sich zwei Linien in einem Punkte vereinigen und einen Winkel bilden, so ist dieser, wie schon gesagt, ein rechter, spitzer oder ein stumpfer Winkel. Ist der Winkel ein rechter, und liegt zugleich am untern Ende einer aufrechtstehenden Linie, so stellt diese Form die Fußform dar. Fig. 79. Der untere kleinere Schenkel No. 1. erhält vorzüglich den Namen Fuß. — So stellt sich der Fuß des Menschen, Affen u. ff. dar. — Sind der Linien mehre, welche zusammen in der Fußform erscheinen, so entsteht der Vogelfuß, dessen einzele Theile Zehen heißen. No. 2. — Der Fuß ist zum Tragen eines andern Körpers bestimmt, und wird Stehen und Tragen zugleich durch denselben bezweckt, so muß er zu unterst eine Fläche, oder doch doppelte Ausdehnung haben. Daraus entstehen die verschiedenen Fußformen bei den mancherlei stehenden Körpern. Oft erhält auch ein besonders eingerichteter Fuß den Namen Gestell.

Liegt der rechte Winkel und der kleinere Schenkel oben an einer aufrechtstenden Linie, so entsteht die Krückenform, Stützenform. Ein Körper, welcher in dieser Form erscheint, und zum Unterstützen eines andern bestimmt ist, heißt Krücke oder Stütze, welche wieder besondere Einrichtung erhalten. — Der Greis geht an der Krücke; die Aeste der fruchtbeladenen Bäume werden durch Stützen unterstützt u. s. w.

Ist der Winkel ein spitzer, und der eine Schenkel kürzer, so entsteht die Hakenform. Ein Körper von dieser Form, und gemeinlich zum Vesthalten bestimmt, heißt Haken. — Der doppelte Haken Fig.

80. heißt Widerhaken, Speer, und wird oft an Pfeilen angebracht,

5. Zwei grade Linien, welche sich durchschneiden, stellen die Kreuzform dar. Sind die Winkel alle rechte, so ist das Kreuz ein grades; sind sie aber spitze und stumpfe Winkel, so ist das Kreuz ein schiefes. — Beim Rechnen zeichnet man ein grades Kreuz, um das Zusammenzählen, ein schiefes aber, um das Multipliziren anzudeuten; die Abzeichen mancher Orden sind Kreuze; an den Häusern stehen oft die Balken kreuzweise; oft stehen die Blätter und Aeste kreuzförmig am Stengel oder Stamme, d. i. so daß sie, wenn man von oben sieht, alle zusammen ein Kreuz bilden. — Sind die vier gleichen, oder die 2 und 2 gleichen Arme des Kreuzes im Durchschnittspunkte beweglich, so stellt sich die Scheere oder Zange dar. — Scheere, Zuckerscheere, Lichtputze, Zange, Sägebock u. s. w.

6. Vereinigen sich mehre Linien in einem Punkte unter verschiedenen Winkeln, so kann dies seyn:

1) An einem der Endpunkte einer Hauptlinie, wodurch alsdann entsteht: a) Der Pinsel, wenn die vereinigten Linien oder linienförmigen Körper am Ende der Hauptlinie sehr gedrängt stehen. — b) Der Schirm, wenn die vereinigten linienförmigen Körper schirmartig ausgedehnt sind. So stehen die Fischbeine im Regen- und Sonnenschirme. Bei manchen Pflanzen, wie beim Kümmel, der Möhre, dem Körbel u. a. stehen die Blumen auf diese Art, welchen Blumenstand man auch Dolde nennt. Die einzelen linienförmigen Theile der Dolde heißen Strahlen; die kleinern Dolden am Ende jedes Strahles heißen Doldchen. Fig. 81. — c) Die Gabelform, wenn sich nur zwei linienförmige Körper am Ende eines

andern vereinigen, oder wenn ein solcher Körper an einem seiner Enden in zwei linienförmige Theile theilt. Eine solche Gabel wird auch oft als Stütze gebraucht. Die Gabelform ist einfach, wenn sie nur an einem Ende eines linienförmigen Körpers vorkommt; oder zusammengesetzt, wenn jeder Theil der Gabel eine Gabel trägt. Fig. 82. So ist z. B. der Stengel des Schmalzkrautes (Fedia olitoria), des Mistels (Viscum album) u. ff. getheilt.

2) In einem Punkte, so daß die vereinigten Linien oder linienförmigen Körper alle in einer Ebene liegen. Dadurch entsteht die Sternform, Fig. 83. in welcher aber die einzelen Strahlen in dem Raume um den Punkt gleich vertheilt liegen müssen. Man unterscheidet den Stern nach der Zahl seiner Strahlen. — So stehen manche Blätter am Stengel, die Blumenblätter in Blumen, sternförmig; der innere Theil eines Wagen-, Pflug-, und Mühlrades bildet einen Stern; oft sind die Schneeflocken sternförmig u. s. w.

3) In einem Punkte innerhalb der Hauptlinie, so daß diese senkrecht auf den übrigen steht, wodurch der Wirtel oder Quirl sich bildet. Fig. 84. — So stehen die Blätter des Labkrautes, des Waldmeisters, des Kannenkrautes (Equisetum), die Aeste der meisten Nadelhölzer, die Blumen der meisten Lippenblümler u. s. w.

4) In mehren Punkten einer Linie. Dann entsteht:

a) Die Klammer, wenn sich zwei Linien an beiden Enden einer Hauptlinie mit derselben so vereinigen, daß alle drei in einer Ebene, zwei aber nach einer Seite gerichtet sind. Solcher Klammern, wie Fig. 85., gebrauchen z. B. die Zimmerleute, um zwei Balken aneinander zu bevestigen.

b) Die Kurbel, a und b Fig. 87. wenn die beiden Haken der Klammer nach entgegengesetzten Seiten liegen. Dieselbe wird da angebracht, wo ein Körper umgedreht werden soll: An den Handmühlen, am Schleifsteine, an der Winde u. s. w.

c) Der Kamm, wenn alle Linien oder linienförmigen Körper auf einer Seite und gleichlaufend liegen. Fig. 86. — Gehen die gleichlaufenden Linien alle durch die Hauptlinie, so entsteht der Doppelkamm oder der Rechen, dessen einzele Theile Zähne heißen. In der Mühle ist ein Rad, welches am Umfange Zähne hat, die in ein anderes greifen und dasselbe bewegen, weßwegen es auch Zahn- oder Kammrad heißt. Fig. 88. — Wenn die einzeln linienförmigen Körper gleichlange Haare sind, so heißen sie auch Wimpern. Die Augenwimpern, gewimperte Blätter, Kelche, u. s. w.

d) Die Federform, wenn die verbundenen Linien oder linienförmigen Körper auf zwei Seiten der Hauptlinie meist unter spitzen Winkeln einander gegenüber stehen. Sie ist einfach, wie in Fig. 80. So stehen nämlich die einzelen Theile in der Fahne einer Schreibfeder; die einzelen Blättchen der Wicken, Bohnen, Erbsen, u. s. w. an dem Hauptstiele, weßwegen ein solches Blatt gefiedert, und jedes einzele Blättchen, Fieder heißt. Die Fiederform ist zusammengesetzt, wenn die Fieder abermal gefiedert sind.

e) Die Astform oder Rispenform, wenn die verbundenen Linien zerstreut und unregelmäßig um die Hauptlinie liegen, und zwar so, daß jede einzele Linie in einer besondern Ebene liegt. Diese Form ist im Pflanzenreiche am weitesten verbreitet; doch laufen

auch unter derselben Nebenthäler in Hauptthäler; Bäche in Hauptbäche, Flüsse in Ströme ein; so schließen sich Nebenbergzüge an Hauptgebirge, u. s. w.

5) Vereinigen sich mehre Linien so, daß nur zwei jedesmal in einem Punkte zusammentreffen, so entsteht:

a) Der Zickzack, wenn die Winkel spitz sind. Fig. 89. — So fährt der Blitz gemeinlich im Zickzack.

b) Die Treppen- oder Terassenform, wenn die Winkel rechte oder stumpfe sind, die abwechselnden Linien aber wagrecht liegen. Fig. 90. In dieser Form stellen sich die Treppen und Terassen dar, d. h. solche natürliche oder künstliche Abstufungen bei Erhebungen, welche das Ansehen einer Treppe haben.

c) Die Knieform, wenn die Winkel spitze oder stumpfe sind, keine der Linien aber wagrecht liegt. Die einzelen Linien heißen Glieder. Ist der Gegenstand, welcher in der Knieform erscheint, an den Enden der Glieder beweglich, so entsteht dort das Gelenk; ist er an den Enden der Glieder angeschwollen, so bildet sich dort der Knoten. — Die Spitze des Winkels erhält vorzüglich den Namen Knie, der Winkel aber heißt Kehle, daher Kniekehle. — Wenn sich Linien vereinigen, wie in Fig. 89. und 90., so nennt man das Ganze auch eine gebrochene Linie.

---

4. Art des krummlinigten Winkels.

7. Die krummlinigten Winkel werden nach der Lage ihrer Schenkel zu einander besonders benannt. So ist Fig. 62. Taf. III. No. 1. ein hohler, No. 2. ein erhabener, No. 3. ein gemischter Winkel. — Wenn 2 krumme Linien, in einem Punkte vereinigt, 2 Winkel bilden, so ist einer ein erhabener,

der andere ein gemischter Winkel; — bilden sie aber 4 Winkel, so ist 1 hohler, 1 erhabener und 2 gemischte unter ihnen. — Die weitere Ausführung ist leicht, und dem Lehrer überlassen.

---

5. Vergleichen des Winkels.

a) Im Allgemeinen.

1. Winkel sind gleich oder ungleich. Gleich sind sie, wenn die Schenkelpaare gleiche Neigung zu einander haben. In diesem Falle kann man die Winkel so aufeinander gelegt denken, daß sie sich decken, d. h. daß die Winkelpunkte und Schenkel genau aufeinander fallen. Ueberhaupt: Gleiche Winkel decken sich; und Winkel, welche sich decken, sind gleich. — Ferner sind Winkel gleich, wenn sie in gleicher Entfernung vom Winkelpunkte, gleiche Oeffnung haben; denn in diesem Falle ist das genaue Decken beim Aufeinanderlegen derselben nothwendige Folge.

2. Gleiche Neigung der Schenkel ist vorhanden:

1) Wenn zwei grade Linien in einem Punkte sich schneiden. Fig. 70. Taf. III. No. 3. Denn die Linie bg neigt sich einerseits in demselben Grade gegen c, als andererseits gegen d; daher ist:

Winkel bac = Winkel dag; und
" bad = " cag.

Ueberhaupt: Scheitelwinkel sind einander gleich. (Anhang §. 17.).

2) Wenn zwei Winkel ein Schenkelpaar ganz oder zum Theil gemein haben, und das andere Paar gleichlaufend ist. Denn Fig. 69. No. 4. neigen sich ba und gd in gleichem Grade gegen fc, daher ist:

Winkel bad = Winkel dgc; und
" baf = " gda.

Ueberhaupt: Innere und äußere Gegenwinkel sind einander gleich. (Anhang §. 23. No. 1.).

Ebenso neigen sich ac und fd, Fig. 69. No. 6 in gleichem Grade gegen bg; daher ist:

Winkel fda = Winkel dac; und
" bdf = " gac.

Ueberhaupt: Innere Wechselwinkel sind gleich; äußere Wechselwinkel sind gleich. (Anhang §. 23. No. 2 und 4.).

3) Wenn zwei Winkel gleichlaufende Schenkelpaare haben. Denn Fig. 91. Taf. IV. ist:

Winkel gdm = Winkel dnc; und
" dnc = " bac; also
" gdm = " bac. — (Anhang §. 23. No. 1.)

Oder Fig. 92. wenn die Schenkelpaare der Winkel bac und bdg gleichlaufend sind, d. i. gd gleichlaufend mit ab, und bd mit ac, so ist, wenn man dg bis m verlängert:

Winkel bdg = Winkel dmc; und
" dmc = " mab; also
" bdg = " mab.

Und aus demselben Grunde ist Winkel amd = Winkel abd. (Anhang §. 23. No. 1.).

4) Wenn Winkel als Mittelpunktswinkel eines Kreises auf gleichen Bogen stehen, so sind sie ebenfalls gleich; denn in diesem Falle haben sie in gleicher Entfernung vom Winkelpunkte gleiche Oeffnung. (Anhang §. 39.).

3. Soll ein Winkel gezeichnet werden, welcher einem andern gleich ist, so kann dieses auf folgende Weise geschehen:

1) Mit dem Winkelmesser:

Man mißt den gegebenen Winkel in Graden, und verzeichnet einen andern nach dem Winkelmesser von derselben Größe, wie schon früher gezeigt wurde.

2) Mit dem Zirkel und dem Lineale:

a) Man verlängert die beiden Schenkel des gegebenen Winkels durch den Winkelpunkt, so ist der entstandene Scheitelwinkel der verlangte Winkel.

b) Man stellt auf den einen Schenkel des gegebenen Winkels, etwa auf ac Fig. 69. Taf. III. No. 3. eine Linie gd gleichlaufend mit dem andern Schenkel des gegebenen Winkels, so ist gdc = bad.

c) Man verzeichnet den verlangten Winkel nach Fig. 91. oder 92. so, daß beide Winkel gleichlaufende Schenkelpaare erhalten.

d) Um z. B. einen Winkel zu zeichnen, welcher dem Winkel bac Fig. 93. gleich sey, zieht man dg, beschreibt aus a mit beliebiger Zirkelöffnung einen Bogen, und einen von d aus mit der gleichen Zirkelöffnung, faßt die Entfernung mn zwischen die Zirkelbeine, trägt dieselbe von s aus auf den beschriebenen Bogen, und zieht alsdann de, so ist der Winkel edg = bac. (Anhang, §. 39 und Aufgabe 4.).

4. Um einen Winkel zu zeichnen, welcher 2, 3, 4, u. ff. mal so groß ist, als ein gegebener, verfährt man auf folgende Weise:

1) Mit dem Winkelmesser:

Man mißt den gegebenen Winkel, und multiplizirt seine Größe mit 2, 3, 4 u. ff. und zeichnet mittels des Winkelmessers einen Winkel von der Größe des Produktes.

2) Mit dem Zirkel:

Man soll z. B. einen Winkel zeichnen, welcher 2, 3, 4 u. ff. mal so groß ist, als bac Fig. 94.

Man beschreibt aus a mit beliebiger Zirkelöffnung den Bogen op, trägt die Strecke hi ein-, zwei-, drei- u. ff. mal auf denselben, und zieht dann ad, ae, ag u. ff. durch k, l, m u. ff., so ist Winkel bad das Doppelte, W. bae das Dreifache, W. bag das Vierfache u. ff. von bac.

---

b) Mit dem Rechten.

1. In Fig. 39. Taf. II. nehmen die Oeffnungen der beiden Winkel bae und bac zusammen den halben Kreisumfang ein, sie haben also zusammen eine Größe von 180°, d. i. sie sind zusammen 2 Rechten gleich. — Denkt man sich nun auf die Linie cc und in den Winkelpunkt a noch beliebig viele Winkel, so nehmen alle zusammen nicht mehr als den halben Kreisumfang ein, d. h. sie betragen alle zusammen 2 Rechte. — Also: Nebenwinkel einer Linie betragen zusammen 2 Rechte. (Anhang §. 14.)

a) Sind die beiden Nebenwinkel einer Linie einander gleich, so beträgt jeder die Hälfte von 2 Rechten (2 R), d. h. er ist 1 R. Je größer nun einer dieser beiden Nebenwinkel wird, desto kleiner muß der andere werden, so daß die Größe des einen Winkels übrig bleibt, wenn man die des andern von 2 R. abzieht. Ist z. B. der Winkel bac Fig. 39. Taf. II. $^1/_2$ R. so ist der W. bae $= \frac{4}{2} - {}^1/_2 = {}^3/_2 = \frac{3 \cdot 90^\circ}{2} = 135^\circ$.

$^1/_3$ R. $= \frac{6}{3} - {}^1/_3 = {}^5/_3 = \frac{5 \cdot 90^\circ}{3} = 150^\circ$.

$^2/_3$ R. $= \frac{6}{3} - {}^2/_3 = {}^4/_3 = \frac{4 \cdot 90^\circ}{3} = 120^\circ$.

$^1/_4$ R. $= \frac{8}{4} - {}^1/_4 = {}^7/_4 = \frac{7 \cdot 90^\circ}{4} = 157\ {}^1/_2{}^\circ$.

$^3/_4$ R. $= \frac{8}{4} - {}^3/_4 = {}^5/_4 = \frac{5 \cdot 90^\circ}{4} = 112\ {}^1/_2{}^\circ$.

u. s. w.

b) Je mehr der gleichen Nebenwinkel einer Linie vorhanden sind, desto kleiner werden die einzelen Winkel, und zwar beträgt jeder

von 2 gleichen Nebw. $\frac{2\text{ R.}}{2} = 1\text{ R.} = 90°$.

" 3 " " $\frac{2\text{ R.}}{3} = {}^2/_3\text{ R.} = 60°$.

" 4 " " $\frac{2\text{ R.}}{4} = {}^2/_4\text{ R.} = 45°$.

" 5 " " $\frac{2\text{ R.}}{5} = {}^2/_5\text{ R.} = 36°$.

" 6 " " $\frac{2\text{ R.}}{6} = {}^2/_6\text{ R.} = 30°$.

" 7 " " $\frac{2\text{ R.}}{7} = {}^2/_7\text{ R.} = 25\ {}^5/_7°$.

" 8 " " $\frac{2\text{ R.}}{8} = {}^2/_8\text{ R.} = 22\ {}^1/_2°$.

u. s. w.

2. Daß die vier Winkel um den Punkt a Fig. 39. Taf. II. zusammen 360° d. i. 4 R. betragen, ist klar; denn wie die Winkel bac + bae = 2 R., so sind es auch die beiden Winkel dac + dae, und also alle vier zusammen = 4 R. Denkt man sich auch hier wieder beliebig viele Winkel um den Punkt a, so nehmen alle nicht mehr als den Kreisumfang ein, sind also 4 R. gleich. Also: Die Winkel um einen Punkt sind 4 R. gleich. (Anhang §. 16.) Je mehr der gleichen Winkel um einen Punkt vorhanden sind, desto kleiner wird wieder der einzele Winkel; und zwar beträgt jeder

von 3 derselben $\frac{4\text{ R.}}{3} = {}^4/_3\text{ R.} = 120°$.

" 4 " $\frac{4\text{ R.}}{4} = 1\text{ R.} = 90°$.

von 5 derselben $\frac{4 \text{ R.}}{5} = 4/5 \text{ R.} = 72°.$

" 6 " $\frac{4 \text{ R.}}{6} = 4/6 \text{ R.} = 60°.$

" 7 " $\frac{4 \text{ R.}}{7} = 4/7 \text{ R.} = 51\ 3/7°.$

" 8 " $\frac{4 \text{ R.}}{8} = 4/8 \text{ R.} = 45°.$ u. s. w.

3. In Fig. 69. No. 4. Taf. III. ist Winkel gdc + W. gda = 2 R.; — da aber W. gdc = W. bad, so ist auch W. gda + W. bad = 2 R. Aus demselben Grunde ist auch W. gdc + baf = 2 R. Also: 1) Innere Gegenwinkel sind 2 R. gleich, wenn zwei Schenkel gleichlaufend sind. 2) Aeußere Gegenwinkel sind 2 R. gleich, unter derselben Bedingung. (Anhang §. 23. No. 2. u. 3.)

4. In Fig. 69. No. 6. ist W. bdf + W. fda = 2 R.; — da aber W. fda = W. dac, so ist auch W. fdb + W. dac = 2 R. — Aus gleichem Grunde ist W. fda + W. gac = 2 R. — Also: Innere und äußere Wechselwinkel sind 2 R. gleich, wenn zwei Schenkel derselben gleichlaufend sind. (Anhang §. 23. No. 5.).

---

§. 43. Theilen.

1. Der Winkel kann getheilt werden. Seine Theilung geschieht durch das Ziehen der Theilungslinien aus dem Winkelpunkte nach der Oeffnung desselben. Zu 2 Theilen braucht man 1; zu 3 Theilen, 2; zu 4 Theilen 3 Theilungslinien, u. s. w.

2. Soll ein Winkel, etwa der Winkel bac Fig. 95. in 2 gleiche Theile getheilt werden, so beschreibt

man mit beliebiger Zirkelöffnung den Bogen mn, sodann aus o und p mit der Zirkelöffnung op zwei Bogen, welche sich in d schneiden, und zieht ad, so ist Winkel dac = dab. Setzt man dieses Verfahren für die beiden Theile fort, beschreibt man aus p und q, sodann aus o und q mit der Zirkelöffnug pq und oq die Bogen bei k und h, zieht alsdann ak und ah, so hat man den Winkel bac in 4 gleiche Theile getheilt. — Auf diese Weise kann man einen Winkel in 2, 4, 8, 16 u. s. w. Theile theilen. (Anhang §. 42 und Aufgabe 5.).

Die Theilung des Winkels in 3, 5, 7 u. s. w. Theile ist schwieriger, und muß mittels des Winkelmessers geschehen. Man mißt deßfalls den zu theilenden Winkel in Graden, theilt diese Anzahl in die verlangte Anzahl gleicher Theile, und trägt die Größe des einzelen Theils auf den im ersten Winkel gezogenen Bogen, welcher zu seinem Halbmesser den des Winkelmessers hat.

---

§. 44. Bewegung.

Der Winkel kann bewegt gedacht werden: 1) Auf seiner Spitze, und seine Schenkel beschreiben alsdann den Umfang des auf der Spitze stehenden Kegels. 2) Auf den Endpunkten beider Schenkel; diese beschreiben alsdann zwei gleichlaufende Linien. 3) Auf dem Endpunkte eines seiner Schenkel; so bewegt sich nämlich der Zirkel, wenn man mit ihm den Umring des Kreises beschreibt.

V. Von den Flächen.

§. 45. Eigenschaften der Fläche. Anschauung.

1. Am Aeußern eines jeden Körpers stellen sich Flächen dar. Jede Fläche ist ausgedehnt nach Länge und Breite; ihr mangelt die Höhe oder Dicke — sie hat nur zwei Ausdehnungen. Nennt man die eine derselben Länge, so heißt die andere Breite, und umgekehrt. Bei der Kreisfläche ist die Länge nicht besonders von der Breite zu unterscheiden, weil diese Fläche von ihrem Mittelpunkte aus nach jeder Richtung gleichweit ausgedehnt ist.

2. Die Ausdehnungen einer jeden Fläche sind begrenzt, d. i. jede Fläche hat eine Begrenzung. Da ihr die Dicke fehlt, so ist ihre Begrenzung von Linien gebildet. Durch die begrenzte Ausdehnung hat jede Fläche eine Größe, und kann daher vergrößert, verkleinert, gemessen, getheilt und bewegt werden.

3. Eine Fläche kann nachgebildet, gezeichnet werden. Die Nachbildung oder Zeichnung einer Fläche geschieht, indem man ihre Grenzlinien in solcher Lage nachbildet, wie diese in der Wirklichkeit die Fläche begrenzen. Das Bild einer Fläche heißt Figur.

---

§. 46. Theile der Fläche.

1. Eine jede Fläche bietet zur besondern Betrachtung folgende Theile dar:

1) Die eigentliche Fläche, d. i. der innerhalb ihrer Umgrenzung liegende Theil.

2) Die Umgrenzung. Diese ist, wie schon gesagt, von Linien gebildet. Kann man in der Um-

grenzung einer Fläche einzele Linien durch ihre besondere Neigung gegen einander unterscheiden, so heißen sie Seiten. — Durch die besondere Neigung der Seiten einer Fläche gegen einander entstehen am Umfange derselben die Aus- und Einbiegungen, die Vorsprünge und Einschnitte. — Die mehr oder minder spitzigen Vorsprünge heißen Spitzen, oder Ecken. Durch die Neigung der Seiten bilden sich auch Winkel, welche entweder innerhalb oder außerhalb der Grenz-Seiten liegen, und deßwegen innere oder äußere Winkel genannt werden.

2. Nach der Art, der Zahl, der Lage und besondern Beschaffenheit dieser Theile sind die Flächen vielfach verschieden, und erhalten daher auch mancherlei Namen.

---

§. 47. Art der Flächen.

1. Nach der eigentlichen Fläche.

1. Eine Fläche ist eben, wenn eine grade Linie nach allen Richtungen in dieselbe fällt. Eine solche Fläche heißt auch blos Ebene. — So ist der Würfel, die Säule, das Flach u. ff. von Ebenen, oder von ebenen Flächen begrenzt. — Nach der Größe einer Fläche können auch wohl Erhebungen und Vertiefungen auf ihr vorkommen, nur dürfen dieselben nicht sehr beträchtlich und bemerkbar seyn, wie dieses der Fall auf großen flachen Landstrecken ist, welche man Ebenen, Flächen, flaches oder platte Land nennt.

2. Eine Fläche ist gekrümmt, wenn eine grade Linie nicht nach allen Richtungen in dieselbe fällt. In diesem Falle ist sie:

1) Einseitig gekrümmt, wenn eine grade Linie nur nach einer Richtung in dieselbe fällt. — Solche einseitig gekrümmte Flächen finden sich an der Walze, dem Kegel, an Röhren, Gewölben u. s. w.

2) Allseitig gekrümmt, wenn eine grade Linie nach keiner Richtung in dieselbe fällt; wenn sie jedesmal nur einen oder zwei Punkte mit ihr gemein hat. — Solche allseitig gekrümmte Flächen kommen vor: An der Kugel; der Himmel stellt sich in einer allseitig gekrümmten Fläche dar u. s. w.

3. Eine gekrümmte Fläche hat, wie die Bogenlinie, eine hohle und eine erhabene Seite, und daher sagt man von ihr:

1) Sie ist erhaben, wenn die erhabene Seite derselben nach oben liegt.

2) Sie ist hohl oder vertieft, wenn die hohle Seite derselben nach oben liegt.

4. Der Gegensatz von eben ist uneben. Eine Fläche ist uneben, wenn sich auf ihr Erhebungen oder Vertiefungen darstellen. Nach der Art und Größe der Unebenheiten ist eine Fläche:

1) Runzlich, wenn sich unbedeutende Unebenheiten in die Länge ziehen. So gibt es runzliche Pflanzenblätter; getrocknete Pflaumen, lange aufbewahrte Aepfel u. ff. sind runzlich; auf der Stirne eines Greises liegen Runzeln u. s. w. Die einzele Erhebung heißt Runzel.

2) Blasig, wenn die Erhebungen rundlich und innen hohl sind. Die einzelen Erhebungen heißen Blasen. — So gibt es blasige Pflanzenblätter; auf ruhiger Wasserfläche sammeln sich die Schaumblasen u. s. w.

3) Warzig, ist die vorige Eigenschaft, nur sind die Erhebungen nicht hohl. So gibt es warzige Pflanzenblätter, Stengel, Früchte u. ff. Die einzele Erhebung heißt Warze.

4) Gerippt, wenn kleine Erhabenheiten sich stark in die Länge ziehen. Die einzele Erhabenheit heißt Rippe. — Pflanzenblätter, Früchte und sonstige Gegenstände.

5) Hügelig, wenn die Erhebungen rundlich, aber verhältnißmäßig von beträchtlicher Größe sind. — So ist eine Landstrecke hügelig, wenn sie mit solchen Erhebungen angefüllt ist, welche eine Höhe von mehren 100 Fuß haben, jedoch die von 1000 Fuß nicht übersteigen. Die einzele Erhebung heißt Hügel.

6) Bergig ist eine Fläche, auf der die Erhebungen verhältnißmäßig noch beträchtlicher sind, als vorher. Die einzele Erhebung heißt Berg. So ist eine Landstrecke bergig, wenn auf ihr Erhebungen von mehr als 1000 Fuß Höhe liegen.

7) Grubig, wenn kleine rundliche Vertiefungen vorhanden sind. Die einzele Vertiefung heißt Grube oder Grübchen, je nachdem sie groß oder klein ist.

8) Gefurcht, wenn stärkere oder schwächere Vertiefungen vorhanden sind, welche sich stark in die Länge erstrecken. — Der Landmann zieht Furchen mit dem Pfluge; manche Saamen sind gefurcht. — Eine starke Furche, welche zur Ableitung des Wassers bestimmt ist, heißt Rinne. Solcher Rinnen kommen auf den Straßen vor; an die Dächer hängt man blecherne Rinnen, um die Seitenwände und das Fundament vor zu starker Nässe zu schützen u. s. w. — Eine Vertiefung, welche sich beträchtlich in die Länge und Tiefe erstreckt, heißt Graben.

9) Wellenförmig, wenn sanfte, mehr oder minder in die Länge gezogene Erhebungen und Vertiefungen abwechseln. So ist z. B. die Oberfläche des Wassers, wenn sie vom Winde oder durch andere Umstände in Bewegung gesetzt wird; so ist gewöhnlich der Boden der Landflächen, welche Ebenen heißen u. s. w.

5. Auf Flächen können Unebenheiten vorkommen, welche weniger durch das Gesicht, als durch das Gefühl wahrgenommen werden können. In dieser Hinsicht ist eine Fläche:

1) Rauh, wenn auf ihr ganz kleine, fast unkenntliche, mehr oder minder scharfe Erhebungen liegen. So sind manche Steinflächen, grobes Papier u. s. w.

2) Gekörnt, wenn sehr kleine, runde, unter einander ziemlich gleiche Erhebungen vorhanden sind. Eine solche Erhebung heißt Korn.

6. Wenn auf einer Fläche gar keine Erhebungen und Vertiefungen vorkommen, so ist sie glatt, z. B. geglättetes Papier, geschliffener Marmor u. s. f. — Ist mit dieser Glätte zugleich ein Glanz verbunden, so ist die Fläche glänzend-glatt; z. B. Glas, manche Pflanzenblätter, geschliffene Hausgeräthe. — Gibt zugleich die Fläche das Bild anderer Gegenstände zurück, so ist sie spiegelig; z. B. die Spiegelfläche, die ruhige Oberfläche des Wassers, und daher der Ausdruck: Wasserspiegel.

7. Noch unterscheidet man in den Künsten und Handwerken die sogenannten auf- oder abwickelbaren Flächen, und versteht darunter solche Flächenkörper, welche zusammengerollt, auf- oder abgewickelt werden können. Dazu gehören z. B. Papier, Tuch, Linnen, Pappe, Felle, Blech, Pflanzenblätter u. s. w.

2. Nach der Umgrenzung.

1) Im Allgemeinen.

1. In Bezug auf den Rand oder die Umgrenzung ist eine Fläche:

1) Eckig, wenn am Rande derselben Ecken oder Vorsprünge sich finden. Nach der Zahl ihrer Ecken oder Vorsprünge ist sie aber zwei-, drei-, vier-, vieleckig. — Alle Flächen des Würfels und der vierseitigen Ecksäule; alle Seitenflächen der Ecksäulen; die Grundfläche der vierseitigen Spitzsäule; alle Flächen des Rauten-Sechs- und des Rauten-Zwölfflachs sind viereckig; — alle Flächen des Vier-, Sechs-, Acht- und des Zwanzigflachs sind dreieckig u. s. w. Wo finden sich fünf-, sechs- u. s. w. eckige Flächen? — Wenn der Rand der eckigen Flächen zwischen den Vorsprüngen gradlinig ist, so ist die Fläche seitig. Nach der Zahl der Seiten ist sie wieder drei-, vier-, fünf-, vielseitig u. s. w. Nicht immer aber liegen zwischen den Vorsprüngen grade Linien, sondern sehr oft wechseln dieselbe mit Einbiegungen ab, und alsdann ist die Fläche:

a) Ausgeschweift oder buchtig, wenn zwischen den Ecken oder Vorsprüngen größere bogenförmige Einbiegungen liegen. — So ist z. B. der Rand des Eichenblattes buchtig u. s. w.

b) Gekerbt, wenn zwischen rundlichen Vorsprüngen krummlinig-erhabene Winkel liegen. — So ist der Rand sehr vieler Pflanzenblätter.

c) Gezähnt oder sägeförmig, wenn zwischen spitzen Vorsprüngen krummlinig-erhabene oder gemischte oder auch gradlinige spitze Winkel liegen. — Z. B. die Säge, sehr viele Pflanzenblätter u. s. w.

d) Spaltig, und zwar zwei-, drei-, vier- u. ff. spaltig, wenn spitzwinkelige, mehr oder minder enge Einschnitte tief in die Fläche eingehen.

2) Eine Fläche ist rund, wenn an dem Rande derselben gar keine Ein- oder Ausbiegungen vorkommen. Sie ist alsdann wieder:

a) Vollkommen- oder kreisrund, wenn der Umfang derselben eine vollkommene Kreislinie beschreibt. — Faßböden, manche Fensterscheiben u. s. w.

b) Rundlich, wenn der Umfang derselben der vollkommenen Kreislinie nahe kommt. Alsdann kann sie wieder seyn:

aa) Elliptisch, wenn der Umfang ein Oblong oder eine Ellipse beschreibt.

bb) Eiförmig oder oval, wenn der Umfang von einer Eilinie gebildet ist.

2. Nach der Aehnlichkeit, welche eine Fläche in ihrer Umgrenzung und Hauptgestalt mit irgend einem bekannten Gegenstande hat, ist sie:

1) Keilförmig, wenn sie nach einer Seite hin gleichmäßig sich zuspitzt. Fig. 69.

2) Herzförmig, wenn sie in ihrem Umfange die Hauptgestalt eines Herzens hat. Fig. 97.

3) Nierenförmig, wenn sie in ihrem Umfange die Hauptgestalt einer Niere hat. Fig. 98.

4) Mond- oder sichelförmig, wenn sie die Hauptgestalt der theilweise erleuchteten Mondscheibe, oder einer Sichel hat. Fig. 99.

5) Pfeilförmig, wenn sie die Hauptgestalt des vordern Theils eines Pfeiles hat. Fig. 100.

6) Spießförmig, wenn sie die Hauptgestalt des vordern Theils eines Spießes hat. Fig. 101.

7) Bandförmig, wenn sie sich bei unbedeutender Breite beträchtlich in die Länge ausdehnt. Beispiele stellen die Schnüre, Bänder u. s. w. dar.

---

2) Nach der Zahl der Seiten, Winkel und Ecken.

1. Die Umfangslinien, welche eine Fläche begrenzen, heißen Seiten. Nach der Zahl dieser Seiten ist eine Fläche 3=, 4=, 5= u. s. w. seitig. — Am Zwanzigflach sind alle Flächen 3seitig. An welchen der vorliegenden Körpern kommen 3=, 4=, 5= u. ff. seitige Flächen vor?

2. Wenn eine Fläche 3, 4, 5 u. s. w. Seiten hat, so hat sie auch eben so viele Winkel und Ecken — d. h. im Allgemeinen:

Die Anzahl der Seiten, Winkel und Ecken einer Fläche stimmt stets überein.

3. Von der Anzahl der Ecken erhält die Fläche ihren Namen. Man nennt nämlich eine Fläche

von 3 Ecken ein Dreieck. Fig. 28. No. 3. Taf. II.
= 4 = = Viereck. = 29. daselbst.
= 5 = = Fünfeck. = 30. =
= 6 = = Sechseck. = 31. =
= vielen = = Vieleck.

4. Nach der Lage der Ebenwinkel einer Fläche innerhalb oder außerhalb der Umfangslinien derselben ist sie:

1) Ein Vieleck mit lauter innern Winkeln. Fig. 28—31. Taf. II.

2) Ein Vieleck mit äußern Winkeln. Fig. 102—104. Taf. IV. — Zu diesen kann aber nie ein Dreieck gezählt werden.

Ein Viereck hat äußere Winkel 1. Fig. 102.
" Fünfeck " " " 1. od. 2. Fig. 103.
" Sechseck " " " 1, 2 oder 3. Fig. 100 und 104.

Man sieht, daß jedesmal 3 innere Winkel bei der höchsten Anzahl von äußern Winkeln übrig bleiben. In jedem Falle kann also ein Vieleck so viele äußere Winkel haben, als es Winkel überhaupt hat, weniger 3.

Ein Dreieck hat also äußere Winkel 3 — 3 = 0.
" Viereck " " " " 4 — 3 = 1.
" Fünfeck " " " " 5 — 3 = 2.
" Sechseck " " " 6 — 3 = 3.
" Siebeneck " " " 7 — 3 = 4.
" Zehneck " " " 10 — 3 = 7.
u. s. w.

5. Die krummlinigen Flächen sind ebenfalls nach der Zahl ihrer Ecken: Drei-, Vier-, Fünf- u. s. w. Ecke. Ein Zweieck kann mit 2 krummen Linien gebildet werden, nicht aber mit graden. Fig. 105. u. 99. In dieser Figur hat man zugleich die Lanzettform oder das Lanzett abgebildet, in welcher z. B. die Blätter der Weiden, Pfirsiche, Rheinweide u. s. w. erscheinen.

6. Wie bei den gradlinigen Flächen, so können auch bei den krummlinigen die Winkel innen und außen liegen; doch tritt bei den letztern die Eigenheit auf, daß bei jedem krummlinigen Vieleck, alle Winkel außen liegen können, was bei den gradlinigen Flächen unmöglich ist. Ein Beispiel gebe die Fig. 106. — Bei den gemischtlinigen Flächen ist dieses nach der Anzahl der graden und krummen Seiten großem Wechsel unterworfen, weßwegen sie hier übergangen, und die gradlinigen Flächen besonders berücksichtigt werden.

244850

3) Die gradlinigen Flächen nach der Art ihrer Winkel, nach der Lage und Größe ihrer Seiten betrachtet.

a) Nach der Art der Winkel.

1. Das gradlinige Dreieck kann haben:

1) Einen rechten und 2 spitze Winkel, in welchem Falle es rechtwinkeliges Dreieck heißt. Fig. 107.

2) Drei spitze Winkel, und heißt alsdann spitzwinkeliges Dreieck. Fig. 108.

3) Einen stumpfen und 2 spitze Winkel, in welchem Falle es stumpfwinkeliges Dreieck heißt. Fig. 109.

2. Das gradlinige Viereck kann haben:

4 rechte Winkel.
2 rechte, 1 spitzen und 1 stumpfen Winkel.
1 rechten und 3 spitze Winkel.
1 rechten, 2 spitze und 1 stumpfen Winkel.
1 rechten, 1 spitzen und 2 stumpfe Winkel.
4 spitze Winkel.
3 spitze und 1 stumpfen Winkel.
2 spitze und 2 stumpfe Winkel.
1 spitzen und 3 stumpfe Winkel.

Nach dieser Form der Winkel wird das Viereck ebenfalls als recht-, spitz- und stumpfwinkeliges besonders benannt. Da es aber der Vierecke von jeder Art der Winkel mehre gibt, so ist die obige Benennung nicht genug bezeichnend, und macht daher eine andere nöthig.

3. Die Form der Winkel im Fünf-, Sechs-, Sieben- u. s. w. Eck ist noch manchfaltiger, als die im Viereck, und eben daher auch ungeschickter zur besondern Benennung derselben; weßhalb zur Bestimm-

ung eines jeden Vielecks, das Dreieck ausgenommen, die Form der Winkel nicht geeignet ist.

4. Die krumm- und gemischtlinigen Flächen können nicht weiter nach der Form ihrer Winkel benannt werden, es sey denn, daß man sie eintheile in hohl-, erhaben- und gemischtwinkelige Flächen.

---

6. Nach Größe und Lage der Seiten mit Bezug auf die Art der Winkel.

1. Das Dreieck ist, wie schon gesagt, recht-, spitz- oder stumpfwinkelig, je nachdem es einen rechten, lauter spitze, oder einen stumpfen Winkel hat. Bei diesen dreifach verschiedenen Dreiecken können die Seiten ihrer Größe nach seyn:

1) Alle drei gleichgroß, — gleichseitiges Dreieck. Fig. 108. No. 1.

2) Zwei gleich- und eine ungleichgroß, — gleichschenkeliges Dreieck. Fig. 108. No. 2.

3) Alle ungleichgroß, — ungleichseitiges Dreieck. Fig. 108. No. 3.

2. Weil die Form der Winkel in den gleich- und ungleichseitigen Dreiecken verschieden seyn kann, so hat man sie darnach auf folgende Art benannt:

1) Das rechtwinkelig-gleichschenkelige Dreieck, Fig. 107. No. 1. hat zwei gleiche Seiten, zwei gleiche spitze Winkel, und zwischen den gleichen Seiten einen rechten Winkel.

2) Das spitzwinkelig-gleichschenkelige Dreieck, Fig. 108. No. 2. hat zwei gleiche Seiten, zwei gleiche spitze Winkel, und zwischen den beiden gleichen Seiten einen spitzen Winkel.

3) Das stumpfwinkelig-gleichschenkelige Dreieck, Fig. 109. No. 1. hat zwei gleiche Seiten, zwei gleiche spitze Winkel, und zwischen den beiden gleichen Seiten einen stumpfen Winkel.

4) Das rechtwinkelig-ungleichschenkelige Dreieck, Fig. 107. No. 2. hat drei ungleiche Seiten, zwei ungleiche spitze und einen rechten Winkel.

5) Das spitzwinkelig-ungleichschenkelige Dreieck, Fig. 108. No. 3. hat drei ungleiche Seiten, und drei ungleiche spitze Winkel.

6) Das stumpwinkelig-ungleichschenkelige Dreieck, Fig. 109. No. 2. hat drei ungleiche Seiten, zwei ungleiche spitze und einen stumpfen Winkel.

3. Von den Seiten des Vierecks können liegen:

1) Zwei und zwei gleichlaufend. Fig. 110. u. 111.

2) Zwei gleich- und zwei ungleichlaufend. Fig. 112. und 113.

3) Alle vier ungleichlaufend. Fig. 114. u. 102.

Nimmt man nun Rücksicht auf die Form der Winkel und die Gleichheit der Seiten, so gibt es darunter folgende Arten:

1) Das Geviert oder das Quadrat, wenn vier rechte Winkel und vier gleiche Seiten vorhanden sind. Fig. 110. No. 1.

2) Das Rechteck oder das rechtwinkelige Parallelogram, wenn vier rechte Winkel, und zwei Paar gleiche und gleichlaufende Seiten vorhanden sind. Fig. 110. No. 2.

3) Die Raute, hat vier gleiche Seiten, wovon zwei Paar gleichlaufend sind, ferner zwei spitze und zwei stumpfe Winkel. Fig. 111. No. 1.

4) Das Rauteneck oder das schiefe Parallelogram hat zwei Paar gleiche und gleichlaufende

Seiten, zwei spitze und zwei stumpfe Winkel. Fig. 111. No. 2.

5) Das falsche Rechteck (rechtwinkelige Parallel-Trapez) hat zwei rechte Winkel, zwei gleichlaufende und zwei ungleichlaufende Seiten. Fig. 112.

6) Das falsche Rauteneck (schiefwinkeliges Parallel-Trapez) hat zwei spitze und zwei stumpfe Winkel, zwei gleichlaufende und zwei ungleichlaufende Seiten. Fig. 113.

7) Das geschobene Viereck, (Trapez) keine gleichlaufenden Seiten, und von seinen Winkeln können seyn:

2 r.	1 sp.	1 st.	Fig. 115	—	0 r.	2 sp.	2 st.	
1 ″	1 ″	2 ″	″ 114	—	0 ″	3 ″	1 ″	Fig. 102.
1 ″	3 ″	0 ″			0 ″	1 ″	1 ″	

4. Bei den Fünf-, Sechs- u. s. w. Ecken bietet die Betrachtung der Form der Winkel, der Lage und Gleichheit der Seiten eine zu große Mannichfaltigkeit dar, weßwegen die eigenen Benennungen derselben wegfallen. — Ueberhaupt nennt man aber ein Vieleck, welches gleiche Winkel und gleiche Seiten hat, ein regelmäßiges Vieleck. So gibt es regelmäßige Dreiecke, Fig. 28. Taf. II., regelmäßige Vierecke, Fig. 29., Fünfecke, Fig. 30., Sechsecke, Fig. 31. u. s. w.

---

§. 48. Nachbilden, Zeichnen.

1. Man kann das Bild einer Fläche zeichnen, und dieses Bild heißt Figur. Die Nachbildung einer Fläche geschieht dadurch, daß man die Umfangslinien so im Bilde durch Striche andeutet, wie sie in der Wirklichkeit eine Fläche begrenzen. — Zur Nachbildung der Flächen, oder zum Zeichnen der Figuren bedarf man der Striche.

2. Um eine gradlinige Figur zu zeichnen, braucht man wenigstens drei Striche. Von dieser Anzahl an kann man aber mit jeder bebiebigen Anzahl Striche eine Figur zeichnen, und diese ist, nach der Anzahl der Striche:

Bei 3 Strichen ein Dreieck.
" 4 " " Viereck.
" 5 " " Fünfeck.
" 6 " " Sechseck u. s. w.

3. Mit 3 graden Strichen kann man nur eine Figur zeichnen, aber mit:

4 graden Strichen, 1 bis 3 Figu ren. Fig. 32.
5 " " 1 — 6 " " 33.
6 " " 1 — 10 " " 34.
7 " " 1 — 15. " "
8 " " 1 — 21. " "
9 " " 1 — 28. " "
10 " " 1 — 36. " "

4. Um eine krummlinige Figur zu zeichnen, braucht man nur einen Kreisstrich zu beschreiben. Aber mit:
2 krummen Strichen bildet man 1 bis 3 Figuren. Fig. 49:
3 " " " " 1 — 7 "
4 " " " " 1 — 13 "
5 " " " " 1 — 21 "
6 " " " " 1 — 31 "

5. Um eine gemischtlinigte Figur zu zeichnen, braucht man einen graden und einen krummen Strich. Aber mit:
2 graden und 1 krummen Strich bildet man 1 bis 4 Fig.
1 " " 2 " " " " 1 — 6 "

Die weitere Ausführung ist unfruchtbar.

6. Ueber die Art der Figuren, welche mit einer gewissen Anzahl von graden Strichen gebildet werden können, sehe man die hier folgende Tabelle.

Striche.	Figuren.	3-Ecke.	4-Ecke.	5-Ecke.	6-Ecke.	Zeichnung.
3	1	1	,	,	,	
4	1	,	1	,	,	
	2	2	,	,	,	
		1	1	,	,	
	3	2	1	,	,	116.
5	1	,	,	1	,	
	2	2	,	,	,	
		1	1	,	,	
		1	,	1	,	
		1	,	,	1	1 7.
		,	2	,	,	
	3	3	,	,	,	
		2	1	,	,	
		2	,	1	,	118.
		2	,	,	1	119.
		1	2	,	,	
	4	3	1	,	,	
		3	,	1	,	
		3	,	,	1	120.
		2	2	,	,	
		2	1	1	,	
		1	3	,	,	
	5	4	1	,	,	
		4	,	1	,	
		3	2	,	,	
		2	3	,	,	
	6	3	3	,	,	
		5	,	1	,	

7. In der Figur 116. lassen sich 4 Dreiecke anschauen, nämlich:

bmd. cmg. abg und acd.

Auf gleiche Weise lassen sich in der Figur 121. zehn Dreiecke anschauen, nämlich:

amn. dmp. brp. crq. gqn.
abq. acp. bmg. dnc. drg.

Ebenso in der Figur 122, nämlich:

amn.
abg. — acd.
dbr. gcr. — dmq. gpn.
mbp. — nqc.

pqr.

(Ueber die höchste Anzahl von Dreiecken, welche mit einer gegebenen Anzahl grader Linien gebildet werden können, siehe Anhang, Aufgabe 34.).

8. In der Figur 123. lassen sich 3 Vierecke anschauen, nämlich:

abcd. abeg. und cdeg.

Auf gleiche Weise lassen sich 6 Vierecke in der Figur 124 anschauen, nämlich:

abcd. abef. abgh.
cdef. cdgh. und
efgh.

Ebenso lassen sich 9 Vierecke in der Figur 125. anschauen, nämlich:

abde. bcef. degh. efhi.
acdf. dfgi. — abgh. bchi. und
acgi.

(Man sehe noch Anhang, Aufgabe 35 und 36.).

Bemerkung. Um Figuren von besonderer Eigenschaft zu zeichnen, muß man die Werkzeuge: Zirkel, Lineal und Winkel- oder Bogenmesser zur Hand nehmen. Ueberdies ist dazu die Kenntniß der Größe der Winkel und Seiten nöthig, daher folgt dieses Verzeichnen später.

---

§. 49. Größe. Vergleichen. Messen.

1. Größe.

1. Als hier zu betrachtende Theile treten auf: Die Winkel, Seiten und die Fläche selbst.

2. Wichtig erscheint hier die Größe der innern Winkel einer Fläche, und darüber gilt folgendes:

1) Die drei innern Winkel eines Dreiecks sind 2 rechten Winkeln (2 R.) oder 180° gleich.

Denn: Man ziehe sich in Fig. 126. die Linie dg durch den Eckpunkt a gleichlaufend mit bc, so ist:

W. dab + bac + cag = 2 R.

nun ist aber nach früherer Einsicht:

W. dab = abc und W. cag = acb.

Setzen wir nun in der ersten Reihe abc statt dab, und acb statt cag, so ist auch

W. abc + bac + acb = 2 R. —

Ist ein Winkel des Dreiecks 1 R., so sind die beiden übrigen zusammen auch 1 R. gleich. Sind aber die beiden übrigen Winkel gleichgroß, so ist jeder derselben ½ R.

Wenn in einem gleichschenkeligen Dreieck die Größe des ungleichen Winkels bekannt ist, so kann die Größe eines jeden der beiden übrigen gefunden werden; denn jeder derselben enthält die Hälfte des Restes, wenn man die Größe des ungleichen Winkels von 2 R. abzieht.

Wenn in einem ungleichwinkeligen Dreieck die Größe zweier Winkel bekannt ist, so kann die des dritten gefunden werden, indem man die Summe der beiden bekannten Winkel von 2 R. abzieht.

2) Die vier innern Winkel eines Vierecks sind 4 R. gleich. Denn man ziehe sich in Fig. 127. die Linie ac, so sind:

W. abc + acb + bac = 2 R.
acd + adc + dac = 2 R.

also alle 6 Winkel, welche die 4 Winkel des Vierecks ausmachen, 4 R. gleich.

3) Die fünf innern Winkel des Fünfecks sind 6 R. gleich. Denn die drei innern Winkel eines Dreiecks sind 2 R. gleich; und dieses ist in Fig. 128. durch das Ziehen der Linien ac und ad dreimal der Fall, also 3 × 2 = 6 R.

Ueberhaupt: Die innern Winkel eines jeden Vielecks betragen doppelt so viele R., als Seiten darin enthalten sind, weniger 4. Also:

Die Winkel des Dreiecks betragen $2 \cdot 3 = 6 - 4 = 2$R.
" " " Vierecks " $2 \cdot 4 = 8 - 4 = 4$ "
" " " Fünfecks " $2 \cdot 5 = 10 - 4 = 6$ "
" " " Sechsecks " $2 \cdot 6 = 12 - 4 = 8$ "
" " " Siebenecks " $2 \cdot 7 = 14 - 4 = 10$ "
" " " Achtecks " $2 \cdot 8 = 16 - 4 = 12$ "

u. s. w.

4) Sind zugleich alle Winkel des Vielecks einander gleich, so kommt auf den einzeln Winkel beim Dreieck das Drittel, beim Viereck das Viertel, beim Fünfeck das Fünftel u. s. w. des ganzen Betrags. Also beträgt der einzele von den gleichen Winkeln

Des Dreiecks $\frac{2}{3}$ R. $= 60°$.
" Vierecks $\frac{4}{4} = 1$ R. $= 90°$.
" Fünfecks $\frac{6}{5} = 1\,{}^1/_5$ R. $= 108°$.
" Sechsecks $\frac{8}{6} = {}^4/_3 = 1\,{}^1/_3$ " $= 120°$.
" Siebenecks $\frac{10}{7} = 1\,{}^3/_7$ " $= 128\,{}^4/_7°$.
" Achtecks $\frac{12}{8} = {}^3/_2 = 1\,{}^1/_2$ " $= 135°$.
" Neunecks $\frac{14}{9} = 1\,{}^5/_9$ " $= 140°$.
" Zehnecks $\frac{16}{10} = {}^8/_5 = 1\,{}^3/_5$ " $= 144°$.
" Elfecks $\frac{18}{11} = 1\,{}^7/_{11}$ " $= 147\,{}^3/_{11}°$
" Zwölfecks $\frac{20}{12} = {}^5/_3 = 1\,{}^2/_3$ " $= 150°$.

u. s. w.

3. Die Größe der Seiten fällt mit der der Linien zusammen, und bietet hier nichts Besonderes dar. Wichtig ist noch, daß besonders im Dreieck von der Größe und Gleichheit der Seiten die Größe und Gleichheit der Winkel abhangt. Darüber gilt folgendes:

1) Der größten Seite eines Dreiecks steht der größte,
" mittelsten " " " " " mittelste,
" kleinsten " " " " " kleinste
Winkel gegenüber, und umgekehrt. Denn die Seite ac Fig. 126. bestimmt die Oeffnung des Winkels abc. Je größer sie nun bei vorheriger Länge der Seiten ab und bc wird, desto größer, und je kleiner sie wird, desto kleiner muß der gegenüberstehende Winkel abc werden, weil seine Größe eben von der Oeffnung desselben abhangt. (Anhang §. 13.).

2) Den gleichen Seiten eines Dreiecks stehen gleiche Winkel gegenüber, und umgekehrt. Denn die Größe des Winkels abc wird von ac, und die des Winkels acb, von ab bestimmt. Da nun bei der gleichen Größe von bc die Oeffnungen beider Winkel gleich sind, so sind die Winkel selbst gleich. (Anhang §. 4. No. 2. und §. 11.).

3) Ein Dreieck, welches drei gleiche Seiten hat, hat auch drei gleiche Winkel, und umgekehrt. (Anhang §. 6 und 12.).

4) Zwei Seiten eines Dreiecks sind zusammengenommen größer als eine, was daraus erhellet, daß eine grade Linie der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist. (Anhang §. 2.).

4. Die Fläche hat eine Flächengröße, und kann daher verglichen, vermehrt, vermindert, gemessen, getheilt und bewegt werden.

5. Nach den vorhergegangenen Eigenschaften der verschiedenen Vielecke können nun dieselbe auch gezeichnet werden.

1) Aus drei gegebenen Linien ab, cd und mn Fig. 130., wovon je zwei zusammengenommen größer sind, als eine, ein Dreieck zu verzeichnen.

Man betrachte eine der gegebenen Linien, etwa mn als die Grundlinie des Dreiecks, d. i. als diejenige Linie, auf welcher das Dreieck zu stehen scheint, beschreibe aus m mit ab, und aus n mit cd zwei Bogenstriche, und verbinde den Durchschnittspunkt a mit den Endpunkten von mn durch grade Linien, so ist das Verlangte geschehen. (Anhang, Aufgabe 10.).

Will man vorher untersuchen, ob drei gegebene Linien geeignet sind, den Umfang eines Dreiecks zu bilden, so muß man sich durch den Zirkel überzeugen, daß je zwei derselben größer sind, als die dritte.

2) Aus drei gegebenen Linien, worunter zwei gleich sind, übrigens doch die zur Verzeichnung eines Dreiecks nöthigen Eigenschaften haben, ein gleichschenkeliges Dreieck zu verzeichnen.

Man verfährt dabei ganz wie vorher, indem man die ungleiche, oder eine der gleichen Linien als Grundlinie des Dreiecks annimmt.

3) Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, dessen Seite eine gegebene Linie ist.

Es sey ab Fig. 131. die gegebene Linie. Man nehme die Grundlinie des Dreiecks mn von der Größe derLinie ab, beschreibe von m und n aus mit der Zirkelöffnung mn die beiden Bogen d, und verbinde deren Durchschnittspunkt durch grade Linien mit den Punkten m nnd n. (Anhang §. 47.).

4) Ueber einer gegebenen Linie ein Geviert zu zeichnen. Dieſes kann mit dem Zirkel oder mit dem Winkelmeſſer geſchehen.

a) Mit dem Winkelmeſſer. Fig. 132.

Man lege den Winkelmeſſer genau an ab und ſteche für a und b die ſenkrecht darüber liegenden Punkte m und n ab, ziehe nach dieſer Richtung ac und bd ſo groß als ab, und verbinde beide gezogenen Linien durch cd.

b) Mit dem Zirkel.

Man verlängere ab nach f und g, ſo daß ab, af und bg einander gleich ſind, faſſe bf oder ag zwiſchen den Zirkel, und beſchreibe mit dieſer Oeffnung aus a und g die Bogen n, und aus b und f die Bogen m, ziehe in der Richtung am, und dann in der Richtung bn die Linien ac und bd ſo groß als ab, und verbinde ihre Endpunkte durch cd. (Anhang, Aufgabe 11.).

5) Ein Rechteck zu verzeichnen hat nach dem vorherigen Verfahren gar keine Schwierigkeit, wenn man noch den Umſtand berückſichtigt, daß zwei gegenüberliegende Seiten kleiner oder größer ſeyn müſſen, als die beiden andern.

6) Ueber eine Linie ab Fig. 133. eine Raute zu zeichnen, deren ſpitzer Winkel 2/3 R. iſt.

Man faſſe ab zwiſchen den Zirkel, ziehe von a und b die Bogen bei c, ſodann von b und c die Bogen bei d, und verbinde die Punkte a, c, d und b mit graden Linien.

Iſt aber der ſpitze Winkel nicht 2/3 R. ſo lege man erſt die Linie ac Fig. 134. unter einem andern als 2/3 R. Winkel an ab, und ſchneide beide gleich, beſchreibe alsdann aus c und b die Bogen bei d,

ziehe sodann cd und bd, so ist die verlangte Raute gezeichnet.

7) Es sey ab Fig. 135. die eine, und cd die andere Seite, fgh aber der spitze Winkel eines zu zeichnenden Rautenecks. Um daraus nun ein Rautenеck zu zeichnen, verfährt man auf folgende Weise:

Man legt kl=ab unter dem gegebenen Winkel fgh an ln=cd, beschreibt aus k mit cd, und aus n mit ab die Bogen bei m, und verbindet mk und mn durch grade Linien.

8) Um überhaupt ein beliebiges regelmäßiges Vieleck zu zeichnen, legt man an jeden Endpunkt einer gegebenen oder beliebig angenommenen Linie als Seite des zu zeichnenden Vielecks den dazu gehörigen Umfangswinkel mittels des Winkelmessers, schneidet die neugezeichnete Linie der anfänglichen gleich, und setzt an jedem freien Endpunkte dieses Verfahren fort, bis das verlangte Vieleck geschlossen ist.

---

2. Vergleichen.

1. Durch die Vergleichung zweier Flächen findet man:
   1) Daß beide einander gleich sind;
   2) Daß die eine ein gewisser Theil der andern ist;
   3) Daß sie sich einander ähnlich sind.

2. Zwei Flächen sind einander gleich, wenn beim Aufeinanderlegen derselben alle Eckpunkte, so wie alle die zwischen denselben liegenden Umfangslinien genau in einander fallen, d. i. wenn sie sich beim Aufeinanderlegen genau decken.

3. Dieses ist der Fall bei Dreiecken:

1) Wenn sie vier gleiche Seiten, und zwischen denselben zwei gleiche Winkel haben.

Denn: Da die Seiten ab, ac, dg und dm Fig. 136. gleich sind, und W. bac = W. gdm, so wird beim Aufeinanderlegen der Dreiecke d in a, g in b und m in c fallen, und daher auch gm in bc, weil zwischen den zwei Punkten b und c nur eine grade Linie möglich ist.

2) Wenn sie zwei Paar gleiche Seiten, und zwischen denselben zwei gleiche Winkel haben, wie Fig. 137.

Denn da ab = dg, ac = dm und W. bac = W. gdm, so wird beim Aufeinanderlegen derselben d in a, g in b, m in c fallen, und daher das eine Dreieck das andere genau decken.

3) Wenn sie auf zwei gleichen Seiten bc=gm, Fig. 136. und 137. vier gleiche Winkel, oder zwei Paar gleiche Winkel haben.

Denn, ist bc = gm, und man legt gm auf bc, so fällt md auf ac, und gd auf ab, weil W. dmg = W. acb, und W. dgm = W. abc. Es wird aber auch d in a fallen müssen, weil der Punkt d nur da in den beiden Linien ac und ab zugleich liegen kann, wo diese beiden Linien selbst nur einen Punkt gemeinschaftlich haben.

4) Wenn sie sechs gleiche Seiten, oder drei Paar gleiche Seiten haben. Es sey z. B. Fig. 137. ab= dg; ac = dm; bc = gm, so haben hier die beiden Winkel abc nnd dgm in gleicher Entfernung von den Winkelpunkten gleiche Oeffnungen, und sind daher einander gleich; dadurch tritt nun für die beiden Dreiecke der Fall in No. 2) ein. (Man sehe die §§. 3. 7. 8. 9. u. 10 des Anhangs.)

4. Es ist der Fall bei Vierecken, und zwar:

1) Bei Gevierten (Quadraten), wenn eine Seite des einen, gleich einer Seite des andern ist.

2) Bei Rechtecken, wenn sie gleiche Grundlinien und gleiche Höhe haben.

3) Bei Rauten und Rautenecken, wenn sie gleiche Länge und Breite haben, und der spitze (oder stumpfe) Winkel des einen gleich dem spitzen (oder stumpfen) Winkel des andern ist.

4) Ein Rechteck ist einem Rauteneck (auch ein Geviert einer Raute) an Flächeninhalt gleich, wenn beide gleiche Grundlinien und gleiche Höhe haben.

Es sey bc Fig. 138 die Grundlinie für das Rechteck abcd und für das Rauteneck bcmn; ihre Höhe ist ab, da man unter Höhe überhaupt die senkrechte Linie von einem der obern Eckpunkte auf die Grundlinie oder deren Verlängerung versteht. Aus dieser gleichen Höhe folgt, daß die Seiten ad und mn in einer Richtung liegen, und daß sie bei ihrer Verlängerung nur eine grade Linie bilden. Dadurch entstehen nun zwei Dreiecke bam und cdn, welche einander gleich sind, da

W. bam = W. cdn als R. und

W. abm = W. dcn, weil ihre Schenkel gleichlaufend sind. Ueberdieß ist Seite ab = Seite cd. Ist nun bam = cdn, und man nimmt von jedem das gemeinschaftliche Dreieck drm weg, so bleibt noch

adrb = mrcn.

Setzt man nun zu jedem dieser Vierecke das Dreieck brc hinzu, so erhält man:

adrb + brc = mrcn + brc,

d. h. adbc = mnbc.

Daraus geht nun auch hervor, daß man ein Rauteneck in ein an Inhalt gleiches Rechteck verwandeln kann.

5. Eine Fläche ist ein gewisser Theil einer andern, und zwar:

1) Ein rechtwinkeliges Dreieck ist die Hälfte eines Rechtecks oder eines Geviertes, wenn es mit ihm gleiche Grundlinie ab und gleiche Höhe ad Fig. 139. A. hat.

Denn denkt man sich das Dreieck dab so auf das Rechteck abcd geschoben, daß ad auf ad und ab auf ab liegt, so fällt bd auf bd. Nun ist aber dc = ab, ad = bc, und W. dcb = dab, folglich haben die beiden Dreiecke zwischen zwei Paar gleichen Seiten zwei gleiche Winkel, und daher sind sie einander gleich; daher ist also ein Dreieck adb die Hälfte des Rechtecks abcd.

Aus ganz gleichem Grunde ist unter derselben Bedingung:

2) Ein spitz- oder stumpfwinkeliges Dreieck die Hälfte einer Raute oder eines Rautenecks.

3) Ein Dreieck ist einem Rechteck gleich, wenn es mit ihm gleiche Grundlinie und doppelte Höhe, oder bei doppelter Grundlinie gleiche Höhe mit ihm hat. Fig. 139. B.

Denn wenn cg=bg, so ist auch cg=ad. Nun ist aber:

W. adm = W. mgc als R. und

" dam = " mcg, als Wechselwinkel;

daher Dreieck adm = Dreieck mcg, und also:

adm + abmg = mcg + abmg,

d. h. Dreieck abc = Rechteck abdg.

4. Ist die Seite eines Geviertes die Hälfte der Seite eines andern, so ist die Fläche des ersten ein Viertel der Fläche des zweiten Geviertes. Fig. 140. abcd $^1/_4$ von mnar. — Ist die Seite des ersten Gevier-tes $^1/_3$ der Seite des zweiten, so ist die Fläche

des ersten 1/9 der Fläche des zweiten. So ist
141. mncq = 1/9 von abcd. Ueberhaupt, nach
Verhältniß der Seite des ersten Geviertes zu der
zweiten steigt das Verhältniß der Flächen auf
gende Weise:

Seite des 1ten Gev.		Seite des 2ten Gev.		Fläche des 1ten Gev.		Fläche des 2ten Gev.	
1	:	2	=	1	:	4	
1	:	3	=	1	:	9	
1	:	4	=	1	:	16	
1	:	5	=	1	:	25	
1	:	6	=	1	:	36	
1	:	7	=	1	:	49	
1	:	8	=	1	:	64	
1	:	9	=	1	:	81	
1	:	10	=	1	:	100	
2	:	3	=	4	:	9	Fig. 141. opc 4/9 von abc
3	:	4	=	9	:	16	Fig. 142. ghc 9/16 von abc
5	:	6	=	25	:	36	u. ſ. w.

5) Mit den Rauten verhält es ſich ſtreng ebe

6) Mit Rechtecken und Rautenecken iſt es ebe
wenn Grundlinie und Höhe, oder Länge und B
in gleichem Verhältniſſe ſtehen, d. h.

Iſt die Höhe 1/2 u. die Breite 1/2 v. 2., ſo iſt die Fläche des 1. 1/4 t
" " " 1/3 " " " 1/3 " " " " " " " 1/9
" " " 1/4 " " " 1/4 " " " " " " " 1/16
" " " 1/5 " " " 1/5 " " " " " " " 1/25
u. ſ. w.

Steht aber die Höhe oder Länge des einen R
oder Rautenecks in einem andern Verhältniſſe
Höhe des andern, als die Breite zur Breite, ſ
die Fläche:

Höhe.		Breite.		Fläche.
1/2	u.	1/3	so	ist 1/6.
1/2	=	1/4	=	= 1/8.
1/2	=	1/5	=	= 1/10 u. s. w.
1/3	=	1/4	=	= 1/12.
1/5	=	1/6	=	= 1/30.
1/7	=	1/8	=	= 1/56 u. s. w.
2/3	=	3/4	=	= 6/12 = 1/2. Fig. 143. hikb = 6/12 = 1/2 von abcd.
3/4	=	4/5	=	= 15/20 = 3/4.
4/5	=	5/6	=	= 20/30 = 2/3.
2/5	=	4/7	=	= 8/35. u. s. w.

6. Durch die Vergleichung der Flächen und Figuren findet man ihre Aehnlichkeit. Aehnlich aber sind zwei Flächen oder Figuren, wenn ihre Winkel der Reihe nach gleich, und ihre Seiten der Reihe nach verhältnißmäßig (proportional) sind. Sollen z. B. die beiden Figuren 144 ähnlich seyn, so muß:

W. a = d; b = e; c = f seyn,

und folgende Verhältnißmäßigkeit der Seiten statt finden:

ab : de = bc : ef
bc : ef = ca : fd
ca : fd = ab : de

oder: ab : bc = de : ef
bc : ca = ef : fd
ca : ab = fd : de.

Ebenso, wenn die beiden Figuren 145. ähnlich seyn sollen, so muß:

W. a = e; b = f; c = g; d = h seyn,

und unter den Seiten derselben folgende Verhältnißmäßigkeit statt finden:

ab : ef = bc : fg
bc : fg = cd : gh
cd : gh = da : he
da : he = ab : ef

oder:

ab : bc = ef : fg
bc : cd = fg : gh
cd : da = gh : he
da : ab = he : ef.

Unter der Aehnlichkeit der Flächen und Figuren ist daher die Gleichheit der gleichliegenden Winkel und die Verhältnißmäßigkeit der gleichliegenden Seitenpaare zu verstehen.

7. Die Gleichheit und Aehnlichkeit der Flächen und Figuren findet in den Künsten und Handwerken eine manchfaltige Anwendung. So verfertigen Handwerker und Künstler Gegenstände, welche dem Muster, dem Modele gleich sind. Zu dem Ende legen sie in vielen Fällen das Model auf einen Gegenstand, und ziehen mit Kreide, Kohle, Bleistift u. ff. die Form desselben ab, welche alsdann ausgeschnitten wird, z. B. der Schneider, Kupferschmied, Blechner u. s. w. — Der Planzeichner zeichnet große Flächen auf kleine Blätter Papier, indem er seine Zeichnung der wirklichen Fläche ähnlich macht u. s. w.

8. Um eine beliebige Fläche oder Figur A einer andern B ähnlich zu zeichnen, muß man die Größe der Winkel und Seiten der erstern kennen, um die Winkel von B denen von A gleich, und die Seiten von B denen von A verhältnißmäßig zu zeichnen.

9. Bringt man das Dreieck abc Fig. 144. so auf das ihm ähnliche def, daß b auf e, ab in de und bc in ef liegt, so ist ac gleichlaufend mit df. — Dieses ist

jedesmal der Fall, wenn ein Dreieck von kleineren Seiten mit einem andern drei gleiche Winkelpaare hat. Um daher z. B. das Dreieck abc dem Dreieck def ähnlich zu zeichnen, darf man nur auf die Seite bc

den W. abc = W. def legen,

die Seite ab zu de schneiden, wie bc zu ef, und ferner

den W. acb = W. efd machen,

und sodann ac ziehen. — (Man sehe über die Aehnlichkeit der Dreiecke die §§. 59, 60 und 62 des Anhangs.)

10. Um ähnliche Vielecke zu zeichnen, darf man nur ähnliche Dreiecke auf ähnliche Weise verbinden. Will man z. B. das Fünfeck FGH ꝛc. Fig. 146. dem Fünfeck ABC ꝛc. ähnlich verzeichnen, so verfährt man auf folgende Weise:

1) Man zieht AC und AD; sodann mit beliebiger Zirkelöffnung die Bogen ab, cd, ef und gh.

2) Man nehme nun irgend eine Seite, etwa FK in einem gewissen Verhältniß zu AE, ziehe die Bogen:

a'b' mit der Zirkelöffnung Aa,
c'd' " " " Ec,

trage nun auf den Bogen a'b' die Stücke ai, ik und kb, und ziehe alsdann FI und FK; trage ferner die Weite cd auf c'd' und ziehe nun KI, so ist das Dreieck FKI ähnlich dem Dreieck AED.

3) Von I aus beschreibe man mit De den Bogen e'f', trage die Weite ef auf e'f', und ziehe nun IH, so ist auch Dreieck FIH ähnlich dem Dreieck ADC.

4) Von H beschreibe man mit der Weite Cg den Bogen g'h', trage darauf die Weite gh und ziehe HG, so ist das Dreieck HGF ähnlich dem Dreieck CAB, und also das Fünfeck FGHIK ähnlich dem Fünfeck ABCDE.

Oder, Fig. 147.

Man wählt den Punkt m beliebig im Innern der Fläche oder der Figur, zieht mA, mB, mC u. s. w. und alsdann ab gleichlaufend mit AB, bc mit BC, cd mit CD u. s. w. — Weil in diesem Falle das Dreieck mab ähnlich dem Dreieck mAB, mbc ähnlich mBC, mcd ähnlich mCD u. s. w. so ist auch das Fünfeck abcde ähnlich dem Fünfeck ABCDE.

11. Das Verhältniß der Seiten einer mit einer größern Fläche ähnlich zu zeichnenden gehörig darzustellen, dient der verjüngte Maßstab. Fig. 148. Seine Einrichtung ist folgende:

Die Länge LM sey eine Ruthe, welche in den Punkten 1, 2, 3, u. s. w. in 10 Fuß getheilt ist. Die auf ihr senkrecht stehende Linie AL von derselben Größe ist in den Punkten B, C, D u. s. w. ebenfalls in 10 gleiche Theile getheilt, und von ihnen aus sind die wagrechten Linien gleichlaufend gezogen. Ebenso sind die Linien k1, i2, h3 u. s. w. unter einander gleichlaufend, aber schief gezogen.

Ist nun LM eine Ruthe, so ist: M1 = 1 Fuß
M2 = 2 "
M3 = 3 "
M4 = 4 "
M5 = 5 "
u. s. w.

Da ferner alle die Dreiecke: KlL, ImL, HnL, GoL u. s. w. sowohl unter einander, als mit dem ganzen Dreiecke A 10 a ähnlich sind, so findet auch folgende Verhältnißmäßigkeit ihrer Seiten statt

LA : Aa = LB : Bt = LC : Cs = LD : Dr = LE : Eq u. s. w.

oder: LB : LA = Bt : Aa

d. h. 9 Theile : 10 Th. = 9 Th. : 10 Theile.

Jeder der zehn Theile von Aa ist ein Zoll, daher ist nun:

Aa = 10 Zoll,
Bt = 9 "
Cs = 8 "
Dr = 7 "
Eq = 6 "
Fp = 5 "
Ge = 4 "
Hn = 3 "
Im = 2 "
Kl = 1 "

Ebenso steht es mit den Stücken der gleichlaufenden Querlinien zwischen 1k und Mk, in umgekehrter Ordnung.

Dieser Eigenschaften wegen kann man innerhalb des Gevierts ALMk eine Linie von jeder beliebigen Größe unter 10 Fuß abstechen. Denn

von A bis k hat man 10 Fuß = 1 Ruthe.
" B " 1 k " " 9 " 9 Zoll.
" C " " " " 9 " 8 "
" D " " " " 9 " 7 "
" E " " " " 9 " 6 " u. s. w.
" B " 2 i " " 8 " 9 "
" C " " " " 8 " 8 "
" D " " " " 8 " 7 " u. s. w,
" G " 5 f " " 5 " 4 "

Ist nun der Maßstab bis P und weiter verlängert, so kann man auf demselben mehre Ruthen, Fuß und Zoll abstechen. So ist z. B. die Linie von R bis 6e = 2 Ruthen, 5 Fuß und 6 Zoll.

Ist die Linie LM nach Maßgabe für die Länge einer Ruthe zu klein, und man nimmt sie als Fuß

an, so bleiben alle vorigen Verhältnisse dieselben, nur verwandeln sich die Fuß in Zoll, und diese in Linien. Setzte man sie aber für 10 Ruthen an, so wäre die Linie Kl = 1 Fuß, Im = 2, Hn = 3, Go = 4 Fuß u. s. w.

Forderung. Stechet mit dem Zirkel auf dem verjüngten Maßstabe folgende Längen ab: 8 Fuß, 9 Zoll; 1 Ruthe, 3 Fuß, 7 Zoll; 5 Fuß, 8 Zoll; 2 Ruthen, 4 Fuß, 6 Zoll u. s. w.

12. Durch das Aufeinanderlegen zweier Flächen oder Figuren findet man den Unterschied zwischen beiden, d. i. dasjenige, um was die eine größer oder kleiner ist als die andere. Besonders zu berücksichtigen ist das Aufeinanderlegen der gradlinigen und der Kreis-Flächen, so daß entweder der Kreis-Umring durch die Ecken der gradlinigen Figur geht, oder daß die Seiten der Letztern den Kreis-Umring berühren. In diesen Fällen ist der Kreis in oder um die gradlinige Figur, oder diese ist in oder um den Kreis beschrieben.

Wichtig für uns ist das Beschreiben einer regelmäßigen gradlinigen Figur in einen Kreis, weil dadurch das Beschreiben oder Verzeichnen gewisser regelmäßiger Vielecke erleichtert wird.

1) Das regelmäßige Dreieck und das regelmäßige Sechseck in einen Kreis zu beschreiben.

Man zieht eine Kreislinie, sticht die Länge des Halbmessers mc Fig. 149. sechsmal auf den Umkreis, und verbindet alsdann die Punkte a, b und c durch grade Linien, und das regelmäßige Dreieck ist verzeichnet. — Verbindet man aber alle sechs Punkte a, d, b, f, c und e durch grade Linien, so hat man das regelmäßige Sechseck verzeichnet. (Wie man bei gegebenem Kreise den Mittelpunkt und also auch den

Halbmesser findet, siehe Anhang §. 42 — 44, und Aufgabe 12.)

2) Das Geviert und das regelmäßige Achteck in einen Kreis zu verzeichnen.

Man zieht einen Kreisstrich, und darin beliebig den Durchmesser bd, und läßt ihn von ac senkrecht durchschneiden, was leicht bewerkstelligt wird, wenn man mit einer Zirkelöffnung, welche bd gleich, oder wenig kleiner ist, aus d und b die Bogen bei n beschreibt, das Lineal mit dem Durchschnittspunkte und dem Mittelpunkte des Kreises in eine Richtung legt, und alsdann ac zieht. Verbindet man nun die Punkte a, b, c und d durch grade Linien, so ist das Geviert verzeichnet. —

Theilt man aber zwei aneinanderliegende Seiten des Geviertes, etwa ab und ad in zwei gleiche Theile, zieht durch diese Theilungspunkte die Halbmesser me, mf, mg und mh, und verbindet alsdann die Punkte a, e, b u. s. w. durch grade Linien, so hat man das regelmäßige Achteck verzeichnet.

13. Hieraus wird nun klar, daß:

1) Eine gradlinige Figur nie eine Kreisfläche genau decken könne, d. i. so, daß alle graden Seiten genau in den Umring des Kreises fallen.

2) Daß der Umfang sowohl, als der Flächeninhalt einer gradlinigen Figur, welche in oder um einen Kreis beschrieben ist, dem Umfange und Inhalte um so näher komme, je mehr Seiten sie habe.

3) Daß man, bei Uebersehung eines geringen Fehlers, die Kreisfläche ansehen kann als die Fläche einer gradlinigen regelmäßigen Figur von sehr vielen Seiten.

3. Messen.

1. Eine Fläche wird durch das Flächenmaß gemessen. Wie man bei jedem Messen eine Einheit, ein Maß vestsetzen muß, so auch bei der Fläche, — und dieses Maß muß selbst eine Fläche seyn. Als Maß, als Einheit nimmt man das Geviert, das Quadrat an, und nennt es das Geviert- oder Quadrat-Maß. Da bei dem Gevierte die Länge und Breite gleichgroß ist, so wird die Einheit des Geviertmaßes nach der Länge einer der Seiten desselben benannnt. So hat man

einen Odr.-Zoll in einem Geviert, dessen Seite 1 Z. L. hat;
" " "Fuß " " " " " 1 F. " "
" " "Rut." " " " " 1 R." "
" " "Meil." " " " " 1 M." "

Eine Fläche messen heißt also aufsuchen, wie oft eine solche Einheit, ein solches Maß in ihr enthalten ist.

2. Das Geviert. — Wenn die Seite eines Geviertes lang ist:

1 Fuß, so ist seine Fläche 1 Quadrat-Fuß (□′)
2 " " " " " 2.2=4 □′. Fig. 140. Taf. V.
3 " " " " " 3.3= 9 □′. Fig. 141.
4 " " " " " 4.4=16 □′. Fig. 142.
5 " " " " " 5.5=25 □′.
6 " " " " " 6.6=36 □′. u. s. w.

Um also den Flächeninhalt eines Geviertes zu finden, darf man nur die Länge einer seiner Seiten mit sich selbst multiplizieren.

Den Längenfuß theilt man in 10 oder in 12 Zoll; den Zoll in 10 oder 12 Linien. Erstere Eintheilungsweise ist die zehntheilige oder Dezimal-, letztere

die zwölftheilige oder Duodezimal-Eintheilung.

Nach der zehntheiligen Eintheilung hat also
Ein □ Fuß 10.10 = 100 □ Zoll;
" □ Zoll 10.10 = 100 □ Linien;
also " □ Fuß 10.10.10 = 100.10 = 1000 □Lin.

Nach der zwölftheiligen Eintheilung hat aber
Ein □ Fuß 12.12 = 144 □ Zoll;
" □ Zoll 12.12 = 144 □ Linien;
also " □ Fuß 12.12.12 = 144.12 = 1728 □Lin.

3. Das Rechteck. — Hat ein Rechteck:
3 F. Länge, 2 F. Br., so hat es Flächeninh. 3.2 = 6 □Fuß.
4 " " 3 " " " " " 4.3 = 12 "
Fig. 151.
5 " " 4 " " " " " 5.4 = 20 "
8 " " 5 " " " " " 8.5 = 40 "

Der Flächeninhalt eines Rechtecks wird also gefunden, indem man die Länge mit der Breite desselben multiplizirt.

4. Die Raute und das Rauteneck. — Wie schon bekannt, ist die Raute einem Geviert, das Rauteneck aber einem Rechtecke gleich, welches mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat. Um also den Flächeninhalt einer Raute oder eines Rautenecks zu finden, darf man nur den Flächeninhalt des gleichen Geviertes oder Rechtecks aufsuchen, d. i. die Grundlinie mit der Höhe (der senkrechten Linie von der Grundlinie bis zur gegenüberliegenden Seite) desselben multipliziren. — Wäre z. B. die Seite bc Fig. 152. = 3 Fuß, und die Höhe dg = 5 Fuß, so enthielte das Rauteneck abcd an □ Inhalt 15 □ Fuß.

5. Das Dreieck. Es ist schon bekannt, daß jedes Dreieck entweder die Hälfte eines Geviertes, eines Rechtecks, einer Raute oder eines Rautenecks ist, das mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat. Daher findet man den Flächeninhalt eines Dreiecks, wenn man

seine Grundlinie mit seiner Höhe multiplizirt, und dieses Produkt mit 2 dividirt.

Wäre die Grundlinie des Dreiecks:

2 Fuß, die Höhe 5 Fuß, so wäre der Inh. $\frac{2.5}{2}=\frac{10}{2}=$ 5 □F.

3 " " " 8 " " " " " $\frac{3.8}{2}=\frac{24}{2}=12$ "

5 " " " 9 " " " " " $\frac{5.9}{2}=\frac{45}{2}=22\frac{1}{2}$ "

6 " " " 7 " " " " " $\frac{6.7}{2}=\frac{42}{2}=21$ "

Den Inhalt eines Dreiecks zu finden, gibt es drei Wege:

1) Man multiplizirt die ganze Grundlinie mit der ganzen Höhe und dividirt das Produkt durch 2. Z. B. Grundl. 4′, Höhe 6′ = Inh. $\frac{4.6}{2}=\frac{24}{2}=$ 12 □ Fuß.

2) Man multiplizirt die halbe Grundlinie mit der ganzen Höhe. Also in vorigem Beispiele: 2.6= 12 □ Fuß.

3) Man multiplizirt die ganze Grundlinie mit der halben Höhe. Also hier: 4.3 = 12 □ Fuß.

6. Das Vieleck. — Jedes gradlinige Vieleck läßt sich durch Winkellinien in Dreiecke zerlegen; und da der Flächeninhalt eines jeden Dreiecks gefunden werden kann, so kann auf diesem Wege auch der Flächeninhalt des Vielecks gefunden werden. — Es sey z. B. der Inhalt des Fünfecks abcde, Fig. 153. zu suchen. Zieht man die Linien ac und ec, sodann die senkrechten: bf, cg und eh, so ist:

Dreieck abc $= \frac{ac.bf}{2}$;

" ace $= \frac{ae.cg}{2}$;

" cde $= \frac{cd.eh}{2}$

Das ganze Fünfeck ist also: $\frac{ac.bf}{2} + \frac{ae.cg}{2} + \frac{cd.eh}{2}$

d. h. $\frac{ac.bf + ae.cg + cd.eh}{2}$

7. Die Kreisfläche. — Die Kreisfläche ist anzusehen als eine regelmäßige gradlinige Figur von sehr vielen Seiten. Zieht man in einer solchen Figur, welche in einen Kreis beschrieben ist, vom Mittelpunkte des Kreises Halbmesser nach jedem Winkelpunkte derselben, so entstehen darin so viele Dreiecke, als die Figur Seiten hat. Der Inhalt dieser gradlinigen Figur würde gefunden, wenn man die Summe aller ihrer Seiten mit der halben Höhe eines solchen Dreiecks multiplizirte. Dieses auf die Berechnung der Kreisfläche angewendet, so würde der Flächeninhalt der Kreisfläche gefunden, wenn man den Umring mit dem halben Halbmesser oder mit dem Viertel des Durchmessers multiplizirte.

Nun hat man gefunden, daß:

Der Durchmesser sich zum Umfange des Kreises verhält, wie 100:314 oder wie 1 : 3 $^{14}/_{100}$.

Es sey nun der Durchmesser eines Kreises = 6 Fuß, so findet man in der Proportion:

$$100 : 314 = 6 : x,$$

den Umring zu 18 $^{21}/_{25}$ Fuß. Man findet nun den Flächeninhalt des Kreises, wenn man die 18 $^{21}/_{25}$ mit $^6/_4$ multiplizirt, zu 28 $^{13}/_{50}$ □ Fuß.

---

§. 50. Vergrößern und Verkleinern der Fläche.

1. Eine Fläche kann vergrößert oder verkleinert werden. Das Vergrößern geschieht durch das

Zusetzen, das Verkleinern durch das Wegnehmen gewisser Flächenstücke. Durch die Vergrößerung der Fläche werden alle oder einige Seiten derselben verlängert, durch ihre Verkleinerung aber werden sie verkürzt.

2. Man kann eine Fläche um ein Dreieck, Viereck, Fünfeck u. s. w. vergrößern oder verkleinern, indem man eine solche Fläche der anfänglichen zusetzt oder wegnimmt. — Geschieht die Vergrößerung einer Fläche nach allen Seiten gleichzeitig, so heißt diese Vergrößerung Erweiterung. Auch die Kreisfläche kann erweitert werden. —

---

§. 51. Theilung der Fläche.

1. Theilung der Fläche im Allgemeinen.

1. Die Fläche hat eine Größe, und kann daher getheilt werden. Zur Theilung der Fläche bedient man sich der Linien nnd Striche, welche daher Theilungslinien oder Theilungsstriche genannt werden. Durch die Theilung einer Fläche entstehen Flächen, welche kleiner als die getheilte, derselben ähnlich oder unähnlich sind. Alle Theilflächen zusammengenommen sind der ganzen Fläche gleich.

2. Die Theilung einer Fläche kann auf gar mannichfaltige Weise geschehen, hauptsächlich aber:

1) Von Winkel zu Winkel. Eine solche Theilungslinie heißt Winkellinie, Gere oder Diagonale.

2) Von Seite zu Seite.

3) Von Winkel zu Seite.

4) Von einem Punkte innerhalb der Fläche nach den Winkeln oder Seiten derselben. In regelmäßigen Figuren heißen diese Theilungslinien, wenn sie vom

Mittelpunkte derselben gezogen sind, Strahlen oder Radien; und die Winkel, welche sie mit einander um den Mittelpunkt bilden, sind die Mittelpunktswinkel.

---

2. Theilung der Fläche von Winkel zu Winkel. — Geren.

1. Die in den Vielecken gezogenen Geren können sich unter einander schneiden, oder nicht. Sollen sie sich nicht schneiden, so kann man ziehen:

a. Im Dreieck: Keine, weil jeder Winkelpunkt desselben mit jedem andern schon durch eine grade Linie verbunden ist.

b. Im Viereck: Eine, weil die zwei gegenüberstehenden Winkelpunkte nicht durch Linien verbunden sind.

c. Im Fünfeck sind solcher unverbundener Winkelpunkte zwei gegen jeden einzelen Winkelpunkt vorhanden, folglich können auch der Geren zwei gezogen werden.

d. Im Sechseck sind solcher Winkelpunkte 3, also sind auch 3 Geren möglich.

Ueberhaupt kann man in einem Vieleck so viele Geren ziehen, welche sich nicht durchschneiden, als Winkelpunkte vorhanden sind, weniger 3. Also:

Im Dreieck : 3 — 3 = 0.
„ Viereck : 4 — 3 = 1.
„ Fünfeck : 5 — 3 = 2.
„ Sechseck : 6 — 3 = 3.
„ Siebeneck: 7 — 3 = 4.
„ Achteck : 8 — 3 = 5.
„ Zwölfeck : 12 — 3 = 9 u. s. w.

2. Zieht man in einem Vieleck die mögliche Anzahl von Geren, welche sich nicht durchschneiden, so entsteht die kleinste Anzahl von Flächentheilen, in welche das Vieleck durch Geren getheilt werden kann, und zugleich lauter Dreiecke. Es entstehen dann jedesmal so viele Dreiecke, als Geren gezogen werden können, mehr 1. Also:

Im Dreieck : 3—3=0 Geren und 0 Dreiecke.
" Viereck : 4—3=1 " " 1 + 1=2 "
" Fünfeck : 5—3=2 " " 2 + 1=3 "
" Sechseck : 6—3=3 " " 3 + 1=4 "
" Siebeneck: 7—3=4 " " 4 + 1=5 "
" Achteck : 8—3=5 " " 5 + 1=6 "
" Zwölfeck : 12—3=9 " " 9 + 1=10 "

u. s. w.

3. Ist das Viereck, in welchem die Gere gezogen wird, ein Gevierte, ein Rechteck, eine Raute oder ein Rauteneck, so sind die beiden entstandenen Dreiecke einander ähnlich und gleich, d. i. deckend. Denn Fig. 154.

W. abc = W. bcd
und W. acb = " dbc } als Wechselwinkel;

beide Dreiecke haben also auf zwei ihrer gleichen Seiten 2 Paar gleicher Winkel, und sind daher deckend.

Im Fünfeck entstehen 2 deckende Dreiecke u. 1 größeres.
" Sechseck " 2 Paar " "
" Siebeneck " 2 " " " 1 "
" Achteck " 3 " " " u. s. w.

4. Durchschneiden sich die Geren, welche man in einem Vieleck zieht, so kann man ziehen: Im Dreieck: 0; im Viereck: 2; im Fünfeck: 5; im Sechseck: 7 u. s. w. — Zählt man die aus jedem Winkelpunkte möglichen Geren, so hat man jede derselben

doppelt gezählt; theilt man daher diese Anzahl durch 2, so hat man die mögliche Anzahl der Geren gefunden. Also:

Im Dreieck : 0.
" Viereck : $\frac{4.1}{2} = 2$.
" Fünfeck : $\frac{5.2}{2} = 5$.
" Sechseck : $\frac{6.3}{2} = 9$.
" Siebeneck : $\frac{7.4}{2} = 14$.
" Achteck : $\frac{8.5}{2} = 20$.
" Zwölfeck : $\frac{12.9}{2} = 54$. u. s. w.

5. Durch die 2 Geren im Gevierte entstehen 4 sich deckende rechtwinkelig gleichschenkelige Dreiecke.— In dem Rechtecke, in der Raute und in dem Rautenecke aber entstehen 2 Paar sich deckende Dreiecke, welche alle gleichflächig sind, weil sie alle gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben.

Im regelmäßigen Fünfeck entstehen durch die 5 Geren: 5 und 5 sich deckende Dreiecke, als: 1) 1, 2, 3, 4 und 5, Fig. 155; — 2) 6, 7, 8, 9 und 10; — und in 11 hat man noch eine Fläche, welche der ganzen ähnlich ist.

Im regelmäßigen Sechseck entstehen: 6 und 12 sich deckende Dreiecke, und 6 sich deckende Vierecke.

6. Die höchste Anzahl von Theilflächen, in welche eine Fläche durch Geren getheilt werden kann, ist:

1) Das Viereck: Durch 1 Gere in 2 Flächen.
" 2 " " 4 "
2) Das Fünfeck: Durch 1 " " 2 "
" 2 " " 4 "
" 3 " " 6 "

Das Fünfeck: Durch 4 Geren in 8 Flächen.

" 5 " " 11 "

3) Das Sechseck: " 1 " " 2 "

" 2 " " 4 "

" 3 " " 6 "

" 4 " " 8 "

" 5 " " 11 "

" 6 " " 13 "

" 7 " " 17 "

" 8 " " 20 "

" 9 " " 24 "

Bemerkung. Der Lehrer lasse sich auch bei jeder vorherigen Anzahl der durch Geren entstandenen Theilflächen die Art derselben angeben.

---

3. Theilung der Flächen von Seite zu Seite.

1. Des Dreiecks. — Die Theilungslinien können auch hier sich durchschneiden, oder nicht. Durchschneiden sie sich nicht, so entstehen:

Mit 1 Linie : 2 Flächen.

" 2 " : 3 "

" 3 " : 4 "

" 4 " : 5 "

" 5 " : 6 " u. s. w.

Sind diese Theilungslinien zugleich untereinander und mit einer Seite des Dreiecks gleichlaufend, wie Fig. 156, so sind die Dreiecke: abc, ade, afg, ahi sowohl untereinander, als auch dem ganzen akl ähnlich.

Durchschneiden sich aber die Theilungslinien, so entstehen:

Durch 2 Linien : 4 Flächen.
" 3 " : 7 "
" 4 " : 11 "
" 5 " : 16 " u. ſ. w.

2. Des Vierecks. — Was über die Theilung des Dreiecks geſagt wurde, gilt auch im Allgemeinen von der des Vierecks. Folgendes iſt noch beſonders zu bemerken.

Zieht man im Gevierte, im Rechteck, in der Raute oder in dem Rauteneck die Theilungslinien ef und gh ſo, daß ſie ſich in irgend einem Punkte der Gere ad ſchneiden, ſo ſind die beiden Stücke cegi und ihfb einander gleich. Denn es iſt:

Fläche aei + eicg + igd = aih + ihfb + idf.
Da aber aei = aih, und gid = dif,
ſo iſt auch: cgei = ihfb.

3. Des Vielecks. — Ueber die Theilung des Vielecks überhaupt iſt außer dem, was über die des Drei- und Vierecks geſagt wurde, noch folgendes zu berückſichtigen.

1) Theilt man jede Seite eines beliebigen Vielecks in zwei gleiche Theile, und verbindet dieſe Theilungspunkte durch Theilungslinien ſo, daß ſich dieſe nicht durchſchneiden, ſo ſchließen ſie eine Fläche ein, welche der anfänglichen ähnlich iſt. Ein Beiſpiel gebe die Figur 158.

2) Zieht man von jeder Seite eines Vielecks eine Theilungslinie an die zweitnächſtliegende, zugleich gleichlaufend mit der zwiſchenliegenden, und alle in gleicher Entfernung von den Seiten, ſo entſteht in der Mitte eine der ganzen ähnliche Fläche. Ein Beiſpiel gebe die Figur 159. Die Umfangsflächen ſind lauter Vierecke, deren Anzahl der doppelten Ecken-

zahl der Hauptfläche gleich, und wovon die gleichliegenden deckend sind.

3) Theilt man eine Fläche, besonders das Viereck, mit kreuzweise und jedesmal mit zwei gegenüberstehenden Seiten gleichlaufenden Linien, so entsteht die Gitterform. Ein Beispiel gebe die Fig. 142. Taf. V.

Solcher Gitter hat man vor manchen Fenstern und Oeffnungen; — das Sieb an Kornfege-Maschinen und Mühlen, das Fensterblei u. ff. stellen Gitter dar; das Drahtgitter besteht aus Draht; — auf gleiche Weise, aber sehr gedrängt, liegen die Fäden in den wollenen und leinenen Tüchern u. s. w. — Die Fäden in den Fischernetzen stellen die Gitterform dar, weßwegen sie auch Netzform genannt wird; doch müssen in ihr die Zwischenräume nicht jedesmal Vierecke seyn. So laufen die Adern in den Blättern aller Laubhölzer, und sonst noch vieler Pflanzen.

4. Die Kreisfläche. — Diese wird durch den Durchmesser in zwei gleiche Theile getheilt. Durch zwei Durchmesser, welche sich senkrecht schneiden, wird sie in 4 gleiche Theile getheilt. Von einer beliebigen Anzahl von Durchmessern, welche sich unter gleichen Winkeln am Mittelpunkte schneiden, wird die Kreisfläche in so viele gleiche Theile getheilt, als der Durchmesser sich schneiden. — Zieht man in der Kreisfläche eine Sehne, so theilt diese die Kreisfläche in zwei Abschnitte, welche immer ungleich sind.

---

4. Theilung der Fläche von Winkel zu Seite, und von Seite zu Winkel.

1. Im Dreieck. — Durch diese Theilungsweise entsteht im Dreiecke:

Durch 1 Linie : 2 Flächen.
" 2 " : 4 "
" 3 " : 6—7 "
" 4 " : 9—10"
" 5 " : 14 " u. ſ. w.

Theilt man in einem gleichſchenkeligen Dreieck den Winkel, welcher zwiſchen den gleichen Seiten liegt, in zwei gleiche Theile, und zieht die Theilungslinie an die gegenüberliegende Seite, ſo wird:

1) Das Dreieck in zwei ſich deckende Dreiecke getheilt;

2) Die gegenüberliegende Seite wird gleich getheilt;

3) Die Theilungslinie ſteht ſenkrecht auf der getheilten Seite.

Denn, Fig. 160. W. bad = W. cad; und W. abd = W. acd. Ferner iſt:

Seite ab = Seite ac, daher beide Dreiecke deckend. Und daraus folgt, daß Seite bd = cd, und W. adb = adc, d. h. jeder 1 R. iſt.

Bei 3 gleichen Thln. des W. entſtehen 2 deckende u. 1 ungleiches Dreieck.
" 4 " " " " " 2 Paar ſich deckende Dreiecke.
" 5 " " " " " 2 Paar deckende u. 1 ungleiches.
" 6 " " " " " 3 Paar deckende Dreiecke u. ſ. w.

Theilt man umgekehrt die Seite eines ſolchen Dreiecks in zwei gleiche Theile, und zieht die Theilungslinie in den gegenüberſtehenden Winkel, ſo bleibt alles, wie vorher.

Theilt man eine beliebige Seite eines jeden Dreiecks in zwei gleiche Theile, und zieht die Theilungslinie in den gegenüberſtehenden Winkel, ſo entſtehen 2 gleichflächige Dreiecke.

In Fig. 161 sey die Linie bc in 2 gleiche Theile getheilt. Zieht man nun af gleichlaufend bc, nnd df gleichlaufend ab, so ist abdf ein Rauteneck, und daher

Dreieck afd = abd.

Es ist aber ebendaher auch af = bd; und weil der Theilung nach bd = dc, so ist auch af = dc. — Ferner ist:

W. afg = W. gdc; und W. fag = W. gcd, als Wechselwinkel, und daher Dreieck agf = dgf. Mithin ist:

Dreieck agd + agf = agd + gdc.

Und da Dreieck agd + agf = Dreieck abd, so ist auch:

„ agd + gdc = „ abd.

Bei 3 gleichen Theilen der Seite entstehen 3 gleichflächige Dreiecke.

„ 4 „ „ „ „ „ 4 „ „

„ 5 „ „ „ „ „ 5 „ „

„ 6 „ „ „ „ „ 6 „ „

2. Im Viereck. — Durch die vorherige Theilungsweise entstehen im Viereck:

Durch 1 Linie : 2 Flächen.

„ 2 „ : 4 „

„ 3 „ : 7 „

„ 4 „ : 10 „

„ 5 „ : 15 „ u. s. w.

Zieht man in einem Viereck von zwei Paar gleichlaufender Seiten, Fig. 162, zwei Theilungslinien aus zwei an einer Seite liegenden Winkeln bm und cm so, daß sie sich in irgend einem Punkte m der gegenüberliegenden Seite ad treffen, so ist das durch sie und eine Seite des Vierecks begrenzte Dreieck die Hälfte des Vierecks. Denn:

Man ziehe mn gleichlaufend mit ab und cd, so ist:

Dreieck bmn = abm

und „ cmn = dcm,

also „ bmc = abm + mcd, daher die Hälfte des Ganzen.

Zieht man in einem Viereck von zwei Paar gleichlaufender Seiten aus der Hälfte einer Seite bc Fig. 163. in einen gegenüberstehenden Winkel a eine Theilungslinie, so ist das auf der Hälfte stehende Dreieck 1/4 des ganzen Vierecks. Geschieht diese Theilung von andern Theilen der einen Seite aus, so ist das Dreieck auf

dem Drittel = 1/6 des Ganzen. Fig. 164.
" Viertel = 1/8 " " .
" Fünftel = 1/10 " " .
und das auf 2/3 = 1/3 " " .
" 3/4 = 3/8 " " .
" 5/6 = 5/12 " " . u. s. w.

---

5. Theilung der Fläche vom Mittelpunkte aus.

1. In regelmäßigen Figuren entstehen durch diese Theilung so viele gleiche Dreiecke, als die Figur Seiten hat, wenn man aus dem Mittelpunkte alle Strahlen in die Winkel zieht. Auch die Mittelpunktswinkel sind von derselben Anzahl. Alle betragen 4 R. oder 360°, als Winkel um einen Punkt; daher erhält man die Größe des einzelen Mittelpunktswinkels, wenn man 4 R. oder 360° durch die Anzahl der vorhandenen Winkel dividirt.

Der einzele Mittelpunktswinkel ist also:

Im Dreieck : $\frac{4}{3}$R. = $\frac{360°}{3}$ = 120°.
" Viereck : $\frac{4}{4}$R. = $\frac{360°}{4}$ = 90°.
" Fünfeck : $\frac{4}{5}$R. = $\frac{360°}{5}$ = 72°.
" Sechseck : $\frac{4}{6}$R. = $\frac{360°}{6}$ = 60°.

Im Siebeneck: $\frac{4}{7}$R. $= \frac{360°}{7} = 51\,\frac{3}{7}°$.

„ Achteck: $\frac{4}{8}$R. $= \frac{360°}{8} = 45°$.

„ Zwölfeck: $\frac{4}{12}$R. $= \frac{360°}{12} = 30°$ u. s. w.

2. Werden die Theilungslinien vom Mittelpunkte an die Seiten gezogen, und zwar auf die Mitte derselben, so entstehen so viele gleiche Vierecke, als Seiten in der Figur vorhanden sind. Mit dem Mittelpunktswinkel verhält es sich aber, wie vorher.

3. Zieht man in einer Kreisfläche, Fig. 165. zwei Halbmesser ac und bc, so heißt das Stück derselben, welches von den beiden Halbmessern ausgeschnitten wird, acb, Ausschnitt.

---

4. Die gradlinigen Flächen können auch durch krumme Linien, sowie die krummlinigen durch grade Linien getheilt werden. Durch grade Linien können getheilt werden alle ebenen Flächen; nur durch krumme Linien die allseitig gebogenen; durch grade und krumme Linien aber die einseitig gebogenen Flächen.

---

§. 52. Lage der Flächen.

1. Im Allgemeinen.

1. Eine ebene Fläche liegt, wenn alle Seiten derselben eine wagrechte Lage haben; oder wenn zwei grade Linien, welche man darin zieht, wagrecht liegen. Sie steht, wenn eine Linie, welche man von einem Punkte, auf welchem sie ruht, an einen gegenüberliegenden zieht, aufrecht steht. — So sind am

Würfel, welcher auf einer Fläche ruht, 2 liegende und 4 stehende Flächen.

2. Eine liegende Fläche ist wagrecht oder schief, eine stehende, senkrecht oder schief. Die schiefe Stellung heißt auch Neigung.

3. Zwei oder mehre ebene Flächen liegen in einer oder in verschiedener Ebene. In einer Ebene liegen sie, wenn die eine als Erweiterung der andern anzusehen ist, oder in dieselbe fällt; in verschiedenen Ebenen liegen sie, wenn dieses nicht der Fall ist.

4. Je nachdem eine Fläche an einem Köper vorkommt, heißt sie:

1) Oberfläche, wenn sie zu oberst liegt;

2) Grundfläche, wenn sie zu unterst liegt, und der Körper zugleich darauf ruht.

3) Seitenflächen, wenn sie an den Seiten, zwischen der Grund- und Oberfläche liegen.

---

2. Ebene Flächen in einerlei Ebene.

1. Zwei und mehre ebene Flächen in einer Ebene liegen neben- oder aufeinander. — Liegen sie aufeinander, so deckt eine die andere ganz oder zum Theil. Im letzten Falle können sie gemein haben:

1) Weder Seiten noch Winkelpunkte. Fig. 147.

2) Einen oder mehre Winkelpunkte. Fig. 149. 150.

3) Einen oder mehre Winkelpunkte der einen in den Seiten der andern. Fig. 158.

4) Einen oder mehre Durchschnittspunkte ihrer Seiten. Fig. 166.

5) Eine oder mehre Seiten, ganz oder zum Theil. Fig. 117. 118.

6) Eine oder mehre Seiten, und zugleich einen oder mehre Winkelpunkte, Punkte in den Seiten, oder Durchschnittspunkte ihrer Seiten. —

2. Liegen ebene Flächen neben einander in einer Ebene, so sind sie getrennt, oder sie berühren sich. Die Berührung geschieht:

1) In einem oder in mehren Eckpunkten.

2) In einer oder in mehren Seiten. Die Seiten, in welchen sich in diesem Falle die Flächen berühren, sind die gemeinschaftlichen Seiten.

3) In Eckpunkten und Seiten zugleich.

3. Wenn Flächen so neben- und aufeinander liegen, daß jedesmal eine die Naht zwischen zwei unter ihr liegenden ganz oder zum Theil deckt, so liegen sie dachziegelförmig. Fig. 167. — So liegen die Ziegel- und Schieferſteine auf den Dächern; die Schuppen der Fische; die Federn der Vögel u. s. w.

---

3. Flächen in verschiedenen Ebenen.

1. Liegen Flächen in verschiedenen Ebenen, so sind sie gleichlaufend oder ungleichlaufend. — So sind am Würfel und an allen Eckſäulen zwei gleichlaufende Endflächen; an der vierseitigen, 6 seitigen, 8 seitigen Eckſäule die Seitenflächen paarweise gleichlaufend. Die Endflächen derselben sind mit den Seitenflächen ungleichlaufend. An allen Spitzſäulen kommen nur ungleichlaufende Flächen vor.

2. Gleichlaufende Flächen haben alle einerlei Lage, d. h. sie sind alle wagrecht, senkrecht oder schief, wenn eine unter ihnen diese Lage hat.

3. Ungleichlaufende Flächen sind auf einer Seite zusammenlaufend (convergirend), auf der andern

auseinanderlaufend (divergirend), — Sie können sich vereinigen, und zwar:

1) Blos in Eckpunkten.
2) " " Seiten.
3) In Eckpunkten und Seiten.

4. Treffen sich zwei Flächen in einer Seite, so bilden sie durch ihre Neigung zu einander einerseits den Flächen- oder Neigungswinkel, welcher ein Rechter, Spitzer oder Stumpfer seyn kann, und andererseits die Kante. — Schneiden sich die Flächen, so bilden sie 2 oder 4 Flächenwinkel oder Durchschnittswinkel, welche alle 4 Rechte oder 2 Spitze und 2 Stumpfe sind; und ihr Durchschnitt ist eine grade Linie, wenn die Flächen eben sind.

5. Treffen sich wenigstens drei Flächen in drei Seiten so, daß sie alle zugleich einen Eckpunkt gemein haben, so bilden sie einerseits den Körperwinkel, und andererseits den eigentlichen Ecken.

6. Sind Flächen so in einander geschoben, wie Fig. 168 und 169, so entstehen die Fächer und Zellen.

---

§. 53. Bewegung der Fläche.

Eine Fläche kann bewegt gedacht werden, und zwar hauptsächlich:

1) In wagrechter Lage auf oder ab. — So bewegt sich die Wasseroberfläche in Gefäßen, wenn des Wassers zugegossen oder weggenommen wird u. s. w. — Ferner vor- oder rück- oder seitwärts.

2) In senkrechter Stellung, vor- oder rückwärts, wie die Säge u. s. w. — oder rechts und links; auf oder ab. —

3) Um ihren Mittelpunkt, was besonders bei den regelmäßigen Flächen und dem Kreise Anwendung fin-

det. — So bewegen sich die Endflächen der Ackerwalze, die Räder u. s. w.

4) Um eine Gere. Hiervon ist das Dreieck ausgeschlossen. —

5) Um eine Seitenachse, d. i. um eine Linie, welche von der Mitte einer Seite auf die Mitte der ihr grade gegenüberstehenden gezogen ist. Hierher gehören blos die Flächen, welche von grader Anzahl Seiten umschlossen sind. — Das Rechteck beschreibt während dieser Bewegung eine Walze.

6) Um eine Linie, welche man aus der Mitte eines Winkels auf die Mitte der gegenüberstehenden Seite zieht. Hierher gehören die Flächen von ungrader Seitenanzahl. — Das gleichschenkelige Dreieck beschreibt einen Kegel. —

7) Um eine Seitenlinie der Fläche. — Das Rechteck auf diese Weise bewegt gedacht, beschreibt eine Walze. So bewegen sich die Thüren, Fenster, die Decken der Bücher u. s. w. — Das rechtwinkelige Dreieck, wenn es sich um einen Schenkel des rechten Winkels bewegt, beschreibt einen Kegel. Bewegt es sich aber um seine größte Seite, so beschreibt es einen Doppelkegel. — Wie verhält dieses sich bei dem spitz- und stumpfwinkeligen Dreiecke? —

VI. Von den Körpern.

§. 54. Anschauung. Merkmale.

Vorbemerkung. Die wesentlichen Merkmale eines Körpers, als: Ausdehnung, Grenze, Größe, Gestalt u. s. w. wurden schon in den Vorübungen angeschaut, und bedürfen hier nicht mehr der strengen Berücksichtigung. Im-

mer aber ist es gut, wenn der Lehrer darüber noch eine Wiederholung anstellt, weil auf diesen Anschauungen das Fassen des vollständigen Begriffes von Körper beruht. Sodann nehme er jeden der aus Pappe geschnittenen Körper auf folgende Weise vor:

1. Das Vierflach.

1) Es ist von 4 gleichen und gleichseitigen Dreiecken begrenzt, welche alle gleiche Neigung gegen einander haben.

2) Zwischen den 4 Flächen liegen 6 Kanten, welche alle gleich, und gegeneinander gleich geneigt sind. Auch 6 gleiche Kantenwinkel sind vorhanden.

3) Ferner sind 4 Ecken vorhanden, wovon 3 um die Grundfläche, und einer an der Spitze liegt. Jeder derselben ist von drei Flächen gebildet, und liegt der Mitte einer Umfangsfläche grade gegenüber. Auch 4 gleiche Körperwinkel sind vorhanden.

4) Es lassen sich im Innern desselben denken: 4 Ecken-Flächenachsen d. i. Linien von einem Eckpunkte auf die Mitte der gegenüberstehenden Fläche senkrecht gedacht. —

Das Vierflach gewährt immer die nämliche Anschauung, welche seiner Flächen auch immer als Grundfläche angesehen werden mag. Es ist ein regelmäßiger Körper, und stellt eine dreiseitige Spitzsäule dar.

2. Das Achtflach. —

1) Das Achtflach ist von 8 gleichen, gleichseitigen Dreiecken begrenzt, worunter 4 Paar gleichlaufend sind.

2) Zwischen seinen Flächen liegen 12 Kanten, welche alle gleich, und gegeneinander gleich geneigt sind. 6 Paar darunter sind gleichlaufend. Auch 12 gleiche Kantenwinkel sind vorhanden.

3) Es finden sich 6 Ecken vor, deren jeder von 4 Flächen gebildet ist, und wovon 3 Paar gegenüberliegend sind. Auch 6 gleiche Körperwinkel sind vorhanden.

4) Im Innern kann man sich denken:

a) 4 Flächenachsen, d. i. Linien von der Mitte einer Fläche auf die Mitte der gegenüberliegenden. Sie sind hier alle gleich, und schneiden sich schief.

b) 3 Eckenachsen, d. i. Linien aus einem Ecken in den gegenüberliegenden. Sie sind hier alle gleich, und schneiden sich senkrecht.

c) 6 Kantenachsen, d. i. Linien von der Mitte einer Kante auf die Mitte der grade gegenüberliegenden. Sie sind hier alle gleich, und 3 Paar derselben schneiden sich senkrecht.

Der Körper auf eine Spitze gestellt, erscheint als eine doppelte vierseitige Spitzsäule. Auf irgend eine Fläche gelegt, gewährt er stets dieselbe Anschauung, und ist ein regelmäßiger Körper.

3. Das Zwanzigflach.

1) Es ist von 20 gleichen gleichseitigen Dreiecken begrenzt, wovon 10 Paar gleichlaufend sind.

2) Zwischen den Flächen liegen 20 Kanten, welche alle gleich, und gegen einander gleich geneigt sind; 10 Paar darunter sind gleichlaufend. Es finden sich auch 20 gleiche Kantenwinkel vor.

3) Es besitzt 12 Ecken, deren jeder von 4 Flächen gebildet ist; 6 Paar derselben sind gegenüberstehend. Auch 12 Körperwinkel sind vorhanden, welche alle gleich sind. —

4) Ins Innere des Körpers kann man sich denken:

a) 10 gleiche Flächenachsen.

b) 6 gleiche Eckenachsen.

c) 10 gleiche Kantenachsen.

Das Zwanzigflach gewährt stets dieselbe Anschauung, und ist ein regelmäßiger Körper.

4. Der Würfel. —

1) Der Würfel ist von 6 Gevierten begrenzt, welche alle deckend sind, alle auf einander senkrecht stehen, und wovon 3 Paar gleichlaufend sind.

2) Zwischen den Flächen liegen 12 Kanten, welche alle einander gleich sind, alle auf einander senkrecht stehen, und wovon 3 mal 4 gleichlaufend sind. Auch sind 12 Kantenwinkel vorhanden, wovon jeder 1 R. ist.

3) Es finden sich 8 Ecken vor, deren jeder von 3 Flächen gebildet ist; 4 Paar derselben sind gegenüberliegend. Ebenso sind 8 gleiche Körperwinkel vorhanden.

4) Ins Innere des Würfels kann man sich denken:

a) 3 Flächenachsen, welche einander gleich sind und sich senkrecht schneiden.

b) 4 gleiche und sich senkrecht schneidende Eckenachsen.

c) 6 Kantenachsen, welche gleich sind, und wovon 3 Paar sich senkrecht schneiden.

Jede Umfangsfläche kann als Grundfläche angesehen werden, und der Körper gewährt jedesmal dieselbe Anschauung. Der Würfel ist ein regelmäßiger Körper, und erscheint als eine vierseitige Eckſäule.

5. Das Zwölfflach. —

1) Es ist von 12 gleichen regelmäßigen Fünfecken begrenzt, wovon 6 Paar gleichlaufend sind.

2) Zwischen den Flächen liegen 30 Kanten, welche alle gleich, und wovon 15 Paar gleichlaufend sind. Alle 30 Kantenwinkel sind einander gleich.

3) Es finden sich 20 Ecken und eben so viele

Körperwinkel vor, welche alle gleich sind, und 10 Paar gegenüberstehend.

4) Ins Innere kann man sich denken:

a) 6 Paar Flächenachsen, welche alle gleich sind, und sich schief schneiden.

b) 10 gleiche Eckenachsen.

c) 15 gleiche Kantenachsen.

Der Körper gewährt stets dieselbe Anschauung, auf welcher Fläche er auch stehen mag; er ist ein regelmäßiger.

Bemerk. Auf gleiche Weise ist das 6 Flach, das Rautensechsflach und das Rautenzwölfflach zu behandeln.

---

6. Die dreiseitige Eckſäule.

1) Sie ist von 5 Flächen begrenzt, wovon 2 Endflächen und 3 Seitenflächen sind. Die beiden Endflächen sind 2 deckende gleichlaufende Dreiecke; die Seitenflächen sind 3 deckende Rechtecke, welche auf den Endflächen senkrecht stehen.

2) Zwischen den Flächen dieses Körpers liegen 9 Kanten, worunter 6 End- und 3 Seitenkanten sind. Die 6 Endkanten sind einander gleich, und jede an der einen Endfläche ist gleichlaufend mit einer an der andern. Die Seitenkanten sind gleich und untereinander gleichlaufend; sie stehen zugleich auf den Endkanten senkrecht.

3) Ecken sind 6 vorhanden, wovon 3 um die Grundfläche und 3 um die Oberfläche liegen. Jeder derselben ist von 3 Flächen gebildet, und jedem liegt die Mitte einer Kante an der andern Endfläche gegenüber. Auch sind 9 Kanten- und 6 Körperwinkel vorhanden.

4) Im Innern des Körpers läßt sich denken:

a) Eine Flächenachse; sie steht senkrecht auf der Mitte jeder Endfläche, und ist da-

her den Seitenkanten gleich und gleichlaufend.

b) Hauptsächlich 3 Ecken-Kantenachsen, aus dem Ecken einer Endfläche auf die Mitte der gegenüberliegenden Kante. Diese sind die größten Linien, welche im Innern des Körpers gedacht werden können.

---

7. Die vierseitige Ecksäule.

1) Sie ist von 6 Flächen begrenzt, wovon 2 Endflächen und 4 Seitenflächen. Die beiden Endflächen sind Gevierte, einander deckend und gleichlaufend. Die Seitenflächen sind 4 deckende Rechtecke, welche alle auf den Endflächen senkrecht stehen, und wovon 2 Paar gleichlaufen. [illegible]nd.

2) Zwischen den Flächen liegen 12 Kanten, wovon 4 um jede Endfläche, und 4 zwischen den Seitenflächen liegen. Die 8 Endkanten sind alle gleichgroß, jede ist mit 3 derselben gleichlaufend, und alle stehen aufeinander und auf den Seitenkanten senkrecht. Die 4 Seitenkanten sind einander gleich und gleichlaufend, und stehen senkrecht auf den Endkanten. — Auch finden sich 12 Kantenwinkel vor, deren jeder 1 R. ist.

3) Ecken sind 8 vorhanden, wovon 4 um jede Endfläche liegen, und jeder von 3 Flächen gebildet ist. Auch gibt es unter ihnen 4 Paar gegenüberliegende. — Auch sind 8 Körperwinkel vorhanden.

4) Ins Innere lassen sich denken:

a) 3 Flächenachsen, worunter eine Längenachse zwischen den Endflächen, und 2 Querachsen zwischen den Seitenflächen sind.

Alle schneiden sich senkrecht. Die Querachsen sind gleich.

b) 4 Eckenachsen; sie sind einander gleich, schneiden sich senkrecht, und sind zugleich die größten Linien, welche man im Innern dieses Körpers denken kann.

c) 6 Kantenachsen; unter ihnen sind 4 und 2 gleich, alle stehen senkrecht auf den Kanten; diejenigen, welche von den Seitenkanten gezogen werden, schneiden sich senkrecht, die von den Endkanten gezogen, schief.

Bemerk. Auf gleiche Weise wird die fünf- und sechsseitige Eckſäule behandelt.

---

8. Die dreiseitige Spitzsäule.

1) Sie ist von 4 Dreiecken begrenzt, wovon eine Grundfläche und drei Seitenflächen sind; die Seitenflächen sind sich deckend, und alle ungleichlaufend.

2) Zwischen den Flächen liegen 6 Kanten, wovon 3 Endkanten an der Grundfläche, und 3 Seitenkanten zwischen den Seitenflächen liegen. Unter allen sind 3 und 3 gleich; alle sind ungleichlaufend; und je 3 treffen in einem Eckpunkte zusammen. — Auch 6 Kantenwinkel sind vorhanden.

3) Es finden sich 4 Ecken vor, wovon 3 um die Grundfläche und eine an der Spitze liegen. Auch 4 Körperwinkel sind vorhanden.

4) Im Innern läßt sich eine Ecken-Flächenachse denken.

9. Die vierseitige Spitzsäule.

1) Sie ist von 5 Flächen begrenzt, wovon die Grundfläche ein Gevierte ist, und die Seitenflächen 4 sich deckende Dreiecke sind; alle sind ungleichlaufend.

2) Zwischen den Flächen liegen 8 Kanten, wovon 2 und 2 gleichlaufende um die Grundfläche, und 4 zwischen den Seitenflächen liegen. Unter allen sind 4 und 4 gleich. Auch 8 Kantenwinkel sind vorhanden, wovon 4 und 4 gleich sind.

3) Es finden sich 5 Ecken vor, wovon 4 an der Grundfläche liegen, und einer an der Spitze. Auch 4 Körperwinkel sind vorhanden, wovon die 4 an der Grundfläche gleich sind.

4) Im Innern läßt sich eine Ecken-Flächenachse denken.

Bemerk. Auf gleiche Weise wird die fünf- und sechsseitige Spitzsäule behandelt.

---

10. Die Walze.

Die Walze zeigt 2 Endflächen, wovon jede ein Kreis ist. Beide sind gleich und gleichlaufend. Ferner eine Umfangs- oder Seitenfläche, welche einfach gekrümmt ist und in sich selbst zurückläuft. — Zwischen den Flächen liegen die beiden Kanten, welche als Kreislinien erscheinen. — Ins Innere lassen sich denken:

1) Eine Längenachse, welche senkrecht auf der Mitte beider Endflächen steht.

2) Sehr viele Querachsen, welche alle gleich sind, sich, die Längenachse senkrecht, und die letztere im Mittelpunkte schneiden.

3) Sehr viele Kantenachsen.

11. Der Kegel.

Dieser zeigt 1) Eine Kreisfläche als Grundfläche; 2) eine einfach gekrümmte, in einer Spitze sich endigende Seitenfläche; 3) eine Endkante, welche als Kreis

erscheint. — Man kann sich im Innern eine Ecken-Flächenachse denken, welche senkrecht auf der Mitte der Grundfläche steht.

12. Die Kugel.

Diese zeigt eine allseitig gekrümmte, in sich selbst zurücklaufende Oberfläche. Im Innern derselben denkt man sich den Mittelpunkt, und durch diesen eine Achse oder einen Durchmesser. Man kann sich deren so viele denken, als Punkte auf der Kugeloberfläche unterschieden werden können, und alle sind einander gleich. Die Endpunkte der Achse heißen Pole, besonders wenn die Kugel sich um dieselbe bewegt.

Bemerk. Eine sehr fruchtbare Uebung ist das Angeben der hauptsächlichsten Veränderungen, welche einer dieser Körper nach Form, Größe und Lage der verschiedenen Theile erleiden kann, und welche der Lehrer nicht unbeachtet übergehen darf. Folgendes Beispiel mache dieses klar.

Die dreiseitige Eckſäule.

1) Die Endflächen können seyn:
   a) Rechtwinkelige gleichschenklige oder ungleichschenkelige;
   b) Spitzwinkelige — — — ;
   c) Stumpfwinkelige — — — Dreiecke.
2) Die Endflächen können liegen:
   a) Gleichlaufend; b) ungleichlaufend; c) senkrecht auf den Seitenflächen; d) schief auf denselben.

Bei jeder dieser Veränderungen gewährt der Körper eine andere Anschauung. Stehen die Seitenflächen senkrecht auf den Endflächen, so ist die Eckſäule eine senkrechte; im andern Falle ist sie eine schiefe. —

Auf diese Weise gehe der Lehrer auch die übrigen ebenmäßigen Körper durch.

---

§. 55. Arten der Körper.

1. Im Allgemeinen.

1. Die Arten der Körper werden durch ihre verschiedenen Merkmale bestimmt, als da sind:

Ausdehnung, Begrenzung, Ausfüllung des Raumes, Gestalt u. s. w.

2. Nach der Ausdehnung und deren Verhältniß unter sich, gibt es:

Punktförmige, Linien-, Flächen- und Massenkörper.

3. Der Gestalt nach gibt es:

1) **Regelmäßige** Körper, d. i. solche, an welchen alle Flächen, Ecken, Kanten, Kantenwinkel und Körperwinkel einander gleich sind. Es gibt unter den von ebenen Flächen begrenzten fünf, nämlich:

1. Das Vierflach, von 4 gleichseitigen △ begrenzt.
2. = Achtflach, = 8 = = =
3. = Zwanzigfl, = 20 = = =
4. Der Würfel, = 6 Gevierten begrenzt.
5. Das Zwölfflach = 12 regelmäßigen Fünfecken begrenzt.

Diesen wird zugezählt:

6. Die Kugel, da dieselbe vom Mittelpunkte aus nach jeder Richtung gleichviel ausgedehnt ist, und von jeder beliebigen Seite betrachtet, dieselbe Anschauung gewährt.

2) **Ebenmäßige** (symmetrische) Körper, d. i. solche Körper, an welchen alle Theile, als Flächen Kanten, Ecken und Winkel um irgend eine Achse der-

ſelben gleichförmig gelagert ſind. Daß zu dieſen Körpern auch die regelmäßigen gehören, verſteht ſich; aber nicht jeder ebenmäßige Körper muß auch ein regelmäßiger ſeyn. Zu den ebenmäßigen Körpern gehören:

Alle Eckſäulen, Spitzſäulen, das Sechsflach, das Rautenſechsflach, das Rautenzwölfflach u. ſ. w. die Walze, der Kegel u. ſ. f.

3) Freigeformte Körper, d. i. ſolche, welche weder zu den regelmäßigen, noch zu den ebenmäßigen gehören. Hierzu ſind die meiſten Natur- und Kunſtgebilde zu zählen.

4) Körper von unbeſtimmter Geſtalt d. i. diejenigen, welche nirgends unter einer beſtimmten Geſtalt angetroffen werden, vielmehr durch die leichte Verſchiebbarkeit ihrer Theile jede beliebige, und beſonders die Geſtalt der Gefäße annehmen, in welche ſie gefaßt werden. Dazu gehören alle Flüſſigkeiten: Waſſer, Luft, Nebel, Wolken u. ſ. w.

4. Nach der Begrenzung iſt ein Körper:

1) Von ebenen Flächen begrenzt. — Alle regelmäßigen und ebenmäßigen Körper, — Kugel, Walze und Kegel ausgenommen.

2) Von einfach gekrümmten Flächen begrenzt: Walze, Kegel.

3) Von allſeitig gekrümmten Flächen begrenzt: Kugel.

4) Theils von ebenen, theils von gekrümmten Flächen begrenzt.

5. Nach der Ausfüllung des Raumes gibt es:

1) Maſſive Körper, bei welchen der ganze innere Raum ununterbrochen von der Maſſe angefüllt iſt, aus welcher auch ihr Aeußeres beſteht; welche alſo keine bedeutenden leeren Räume einſchließen.

2) Hohle Körper, d. i. solche, welche nicht durchaus in ihrem Innern von derselben Masse angefüllt sind, woraus auch ihr Aeußeres besteht; also welche bedeutende leere Räume einschließen. Dieselben sind:

a) Geschlossen hohl, wenn der innere leere Raum keine Oeffnung nach außen hat.

b) Durchbohrt, wenn der innere leere Raum zwei Oeffnungen nach außen hat.

c) Ausgehöhlt, wenn der innere leere Raum nur eine Oeffnung nach außen hat.

d) Durchlöchert, wenn mehrere röhrenförmige leere Räume das Innere desselben nach einerlei oder verschiedener Richtung durchziehen. — Schwamm.

6. Unter allen diesen Körpern aber gibt es sogenannte Regel- oder Musterkörper (Normal-Körper) d. i. solche, welche eines oder mehre der vorhergehenden Merkmale in hohem Grade, oder auf ausgezeichnete Weise besitzen, welche an sehr vielen andern Körpern, aber mit gewissen Abänderungen, vorkommen.

---

2. Die punktförmigen Körper.

1. Unter punktförmigen Körpern sind diejenigen zu verstehen, bei welchen die Ausdehnungen nach Länge, Breite und Dicke ganz oder fast gleich sind, welche also, bei unansehnlicher Größe eine runde oder doch ziemlich rundliche Gestalt haben. — Als Musterkörper tritt auf:

1) Das Korn, rund oder rundlich, von unansehnlicher Größe. Dahin gehören: Sand-, Saamen-, Schrot-, Pulverkorn u. s. w.

2) Die Kugel, von ansehnlicherer Größe, als das Korn, doch immer noch klein. Erbse, Wicke; Perlen, Thautropfen u. s. w.

Sie kann seyn:

a) Durchbohrt: Körner in Rosenkränzen, die in Schnüren gefaßte Perlen u. s. w.

b) Hohl, wie der Thautropfen, Seifenblasen, Glas- und Metallkugeln u. s. w.

---

3. Die Linien-Körper.

1. Diese sind solche Körper, welche am meisten in die Länge ausgedehnt, und bei welchen die Ausdehnungen nach Breite und Dicke sehr gering sind, oder gar nicht in Betracht gezogen werden können. — Nach der Art ihrer Umgrenzung sind sie von ebenen oder von gekrümmten Flächen begrenzt.

2. Als Musterkörper treten auf:

1) Die dreiseitige Ecksäule, wie bei vielen Pflanzenstengeln.
" vierseitige " , wie bei vielen Stäben.
" 5-, 6- u. s. w. seitige Ecksäule.

2) Die Spitzsäulen, wie bei vielen Werkzeugen, welche zum Stechen dienen, als: Nägel, Stifte, Priemen u. s. w.

3) Die Walze, wie bei vielen Stäben, Pflanzenstengeln, Saiten, Nadeln, Haare u. s. w.

4) Der Kegel, wie bei Orgelpfeifen, Masten, Nadeln, Stacheln, Dorne, Borsten u. s. w.

5) Die Röhre, d. i. die hohle Walze oder die hohle vielseitige Ecksäule. — So hat man Glasröhren, Grashalm, andere Pflanzenstengel, das Haar u. s. w.

3. Nach der Hauptgestalt sind die Linien-Körper ade oder gebogen, gekrümmt, gewunden f. w.

---

4. Die Flächen-Körper.

1. Unter Flächen-Körper versteht man diejenigen rper, deren unbeträchtliche Ausdehnung in die Dicke gen ihre beträchtlichere Länge und Breite nicht in tracht kommt.

2. Als Musterkörper treten auf:

1) Die Eckſäule, welche als solche angesehen, n der unbeträchtlichsten Ausdehnung in die Höhe seyn nn. Hierher gehören:

a) Die Platte, ein Flächenkörper von etwas ansehnlicher Dicke, welcher auf einem andern Gegenstande aufliegt, oder einem Körper zur Grundlage dient, also in der Regel in wagrechter Lage erscheint. — So hat der Tisch eine Platte; auf manchen Komoden und Tischen hat man steinerne (Marmor- oder Schiefer-) Platten; der Boden der Kirchen ist mit Steinplatten belegt; auf dem Altare liegt die Altarplatte u. s. w.

b) Die Tafel, ein Flächenkörper von geringerer Dicke, als die Platte, und welcher nicht jedesmal in wagrechter Lage erscheint. — Die Schüler gebrauchen Tafeln zum Rechnen, Schreiben und Zeichnen; in jeder Schule ist eine große Wandtafel; jede Fensterscheibe stellt eine Glastafel dar u. s. w.

c) Der Spiegel ist eine von einem besondern Rahmen eingefaßte Tafel. So erscheint die

gerahmte Schiefertafel, Gemälde, Bilder u. s. w. Die Schreiner, Zimmerleute und Maurer nennen auch oft die mittlern Tafeln in Thüren, die Ausfüllungen der Gefächer und Wände, Spiegel.

d) Die Wand ist ein Flächenkörper, welcher auf einer Seite ruht, und gewöhnlich aus Holz, Lehm, Stein u. s. w. besteht. — So gibt es Bretterwände um Gärten und an Hütten; Lehmwände an Häusern, Mauern; auch spricht man von senkrechten und überhangenden Felswänden u. s. w.

2) Die Walze, von unbeträchtlicher Höhe. Dahin gehören:

a) Die Scheibe, ein dünner, runder Flächenkörper. — So erscheint uns die Sonne und der Mond als glänzende Scheiben; die Schützen schießen nach der Scheibe; die Blume des Masliebchens, der Wucherblume u. ff. stellen auf der Mitte eine gelbe Scheibe dar. u. s. w. — Wird der mittlere Theil der Scheibe ausgeschnitten, so entsteht dadurch der Reif, Ring, oder Kranz.

b) Die Linse ist eine Scheibe, deren beide Flächen etwas erhaben sind. — So ist die bekannte Hülsenfrucht: Linse gestaltet; manche Brillen- und Vergrößerungsgläser, die Faßböden u. s. w. stellen Linsen dar.

c) Der Teller ist eine Scheibe, deren eine Fläche vertieft, die andere aber erhaben ist.

3) Gehören hierher solche Flächenkörper, welche durch ihre Verrichtung, Gestalt oder durch ihren Stoff nicht zu den vorherigen gezählt werden können, als:

r Deckel, die Decke; die Schuppe, der Schild, s Schild; das Band, Blatt u. ſ. w.

5. Die Maſſen-Körper.

1. Unter Maſſenkörper verſteht man ſolche Kör-r, deren Ausdehnungen beträchtlich, und unter ein-der von ſolcher Stärke ſind, daß keine derſelben gen eine andere außer Acht kommen darf, obgleich e die andere bedeutend übertreffen kann.

2. Als Muſterkörper treten auf:

1) Die Eckſäulen. Von der Natur geſchaffen det man ſie nur in dem Steinreiche als Kryſtalle. urch die Kunſt der Menſchen wird deren Geſtalt or vielen maſſiven Körpern angebildet, als: Bau-lzern, Metallſtäben, Bauſteinen u. ſ. w. Die Dä-er an Häuſern, Steinhaufen, Haufen von Bom-n, Pfeiler, Keile u. ff. erſcheinen als Eckſäulen.

Als hohle Eckſäulen erſcheinen: Der Sarg, die iſte, Verſchläge, Thürme, Häuſer u. ſ. w.

2) Die Spitzſäulen. Dieſe finden ſich, als n der Natur geſchaffen, wieder nur im Steinreiche s Kryſtalle. Sonſt aber erſcheinen die Dächer der ligen Thürme, mancher Gartenhäuschen, mancher ohnhäuſer u. ſ. w. als Spitzſäulen.

3) Alle übrigen regelmäßigen und ebenmäßigen, n ebenen Flächen begrenzten Körper, welche alle, von r Natur geſchaffen, ſich im Steinreiche vorfinden, und ren Geſtalt manchen Kunſtgebilden angeformt wird.

4) Die Walze. Dieſe erſcheint in runden Thür-n, in der Röhre, Pumpe u. ſ. w.

5) Der Kegel erſcheint in den Dächern runder ürme, im Kreiſel, und hohl im Trichter und Helm. s Doppelkegel erſcheint die Sanduhr u. ſ. w.

§. 57. Theilen des Körpers.

1. Der Körper kann **getheilt**, d. i. in kleinere Stücke, als das Ganze ist, zerlegt werden. Alle Theile zusammengenommen sind aber dem Ganzen wieder gleich.

2. Die Theilung der Körper muß, nach der verschiedenen Natur seiner Masse, auf mancherlei Weise bewerkstelligt werden, und zwar:

1) **Durch Spalten und Reißen.** Dazu wendet man an:

a) **Ordentliche Keile aus Holz oder Eisen.** So spaltet man dicke Stücke Holz und Steine. Mit einer Anzahl trockener Holzkeile, welche man, nachdem sie in gehauene Rinnen eines Steines eingeschlagen worden, mit Wasser anschwellt, kann man dicke Steine sprengen.

b) **Beile.** Mit diesen spaltet man Holz zu Weinpfählen, Rudern, Latten, Faßdauben u.s.w.

c) **Meißel, Messer** oder messerförmige Werkzeuge, welche ebenfalls als Keile wirken. Der Korbmacher spaltet die Weidenruthen mit dem **Reißer**, welcher ein Messer von drei bis vier Schneiden ist.

2) **Durch Zerschneiden.** Dabei wendet man folgende Mittel an:

a) **Messer** und alle diejenigen Werkzeuge, welche mit einer solchen Schärfe auf ähnliche Art schneiden, und als Keile wirken. Mit dem gewöhnlichen **Messer** schneidet man Holz, Brod, Papier, Federn, kurz Dinge aus dem Pflanzen- und Thierreich. Mit der **Strohschneidmaschine** oder mit der **Häckselmühle** wird das Stroh und sonstige Pflanzen in kurze Stückchen zu Fut-

ter geschnitten. Der Kohlschnitter bedient sich eines besondern Messers. Auf der Kartoffelmühle werden Kartoffeln zerschnitten. In Eisenschneidmühlen hat man eine Maschine, womit das Eisen geschnitten wird.

b) Hobel und Meißel, wie sie vom Schreiner und Drechsler gebraucht werden.

c) Die Scheere, welche den zu zerschneidenden Gegenstand zwischen ihre Schenkel faßt. Der Nadler, Klempner u. ff. bedienen sich der Metallscheeren.

d) Sägen, Feilen, Feuersteine, Demant u. s. w. — Mit dem Thondraht schneidet der Töpfer das fertig gedrehte Stück von der Scheibe. Mit Messingdraht schneidet der Leimsieder den gekochten Leim in Scheiben. Mit einem bloßen Faden kann man die Seife bequem schneiden.

3) Durch Zerreiben. Man bedient sich dabei:

a) Der Mörser und Reibschalen mit einer Keule. So werden Salz, Körner u. a. Dinge zerrieben.

b) Eines vestliegenden Steines, über welchem ein anderer im Kreise herumgeführt wird, wie beim Farbereiben. Auf gleiche Weise wirken die Korn-, Gyps-, Kalk- und Lohmühlen. Hierher gehört auch der Mühlstein, welcher auf einer Kante umläuft, und die Ackerwalze.

c) Eingekerbter Kegel, welche sich in stählernen Hülsen drehen. So sind die Kaffee-, Pfeffer- und Gewürzmühlen eingerichtet.

d) Der Reibeisen, Rapen, Raspeln und Feilen und anderer sägenförmiger Werkzeuge.

§. 57. Theilen des Körpers.

1. Der Körper kann getheilt, d. i. in kleinere Stücke, als das Ganze ist, zerlegt werden. Alle Theile zusammengenommen sind aber dem Ganzen wieder gleich.

2. Die Theilung der Körper muß, nach der verschiedenen Natur seiner Masse, auf mancherlei Weise bewerkstelligt werden, und zwar:

1) Durch Spalten und Reißen. Dazu wendet man an:

a) Ordentliche Keile aus Holz oder Eisen. So spaltet man dicke Stücke Holz und Steine. Mit einer Anzahl trockener Holzkeile, welche man, nachdem sie in gehauene Rinnen eines Steines eingeschlagen worden, mit Wasser anschwellt, kann man dicke Steine sprengen.

b) Beile. Mit diesen spaltet man Holz zu Weinpfählen, Rudern, Latten, Faßdauben u.s.w.

c) Meißel, Messer oder messerförmige Werkzeuge, welche ebenfalls als Keile wirken. Der Korbmacher spaltet die Weidenruthen mit dem Reißer, welcher ein Messer von drei bis vier Schneiden ist.

2) Durch Zerschneiden. Dabei wendet man folgende Mittel an:

a) Messer und alle diejenigen Werkzeuge, welche mit einer solchen Schärfe auf ähnliche Art schneiden, und als Keile wirken. Mit dem gewöhnlichen Messer schneidet man Holz, Brod, Papier, Federn, kurz Dinge aus dem Pflanzen- und Thierreich. Mit der Strohschneidmaschine oder mit der Häckselmühle wird das Stroh und sonstige Pflanzen in kurze Stückchen zu Fut-

ter geschnitten. Der Kohlschnitter bedient sich eines besondern Messers. Auf der Kartoffelmühle werden Kartoffeln zerschnitten. In Eisenschneidmühlen hat man eine Maschine, womit das Eisen geschnitten wird.

b) Hobel und Meißel, wie sie vom Schreiner und Drechsler gebraucht werden.

c) Die Scheere, welche den zu zerschneidenden Gegenstand zwischen ihre Schenkel faßt. Der Nadler, Klempner u. ff. bedienen sich der Metallscheeren.

d) Sägen, Feilen, Feuersteine, Demant u. s. w. — Mit dem Thondraht schneidet der Töpfer das fertig gedrehte Stück von der Scheibe. Mit Messingdraht schneidet der Leimsieder den gekochten Leim in Scheiben. Mit einem bloßen Faden kann man die Seife bequem schneiden.

3) Durch Zerreiben. Man bedient sich dabei:

a) Der Mörser und Reibschalen mit einer Keule. So werden Salz, Körner u. a. Dinge zerrieben.

b) Eines vestliegenden Steines, über welchem ein anderer im Kreise herumgeführt wird, wie beim Farbereiben. Auf gleiche Weise wirken die Korn-, Gyps-, Kalk- und Lohmühlen. Hierher gehört auch der Mühlstein, welcher auf einer Kante umläuft, und die Ackerwalze.

c) Eingekerbter Kegel, welche sich in stählernen Hülsen drehen. So sind die Kaffee-, Pfeffer- und Gewürzmühlen eingerichtet.

d) Der Reibeisen, Rapen, Raspeln und Feilen und anderer sägenförmiger Werkzeuge.

4) Durch Zerschlagen und Zerdrücken. Man bedient sich dabei folgender Mittel:

a) Der bloßen Hände und Füße. So zerdrückt man Weinbeeren, Johannisbeeren, Citronen u. s. w.

b) Des Hammers. So zerschlägt man mit einfachen Hämmern Steine und andere harte Körper. Auf den Hammerwerken hat man Stampfen, welche die Schlacken zerstampfen oder zerschlagen.

c) Einer Schraube oder einer Art Presse, wie z. B. der Nußknacker u. A.

3. In der Formen- und Raumlehre hat man es hauptsächlich mit dem begrenzten Raume zu thun, welcher von der Masse des Körpers erfüllt wird, und diesen Raum nennt man den Raumkörper (den mathematischen Körper). Dieser wird, strenge genommen, nur von der Fläche getheilt oder geschnitten.

Zu 2 Theilen braucht man 1 Fläche,
" 3 " " " 2 "
" 4 " " " 3 "
" 5 " " " 4 " u. s. w.

4. Die Theilungsfläche, der Schnitt oder Durchschnitt, kann in den verschiedenen Körpern sehr verschieden zu den Umfangsflächen, Kanten und Ecken liegen, und heißt dann hauptsächlich:

1) Parallelschnitt, wenn er mit einer oder zwei Umfangsflächen gleichlaufend liegt.

2) Längenschnitt, wenn er nach der Länge des Körpers geschieht.

3) Querschnitt, wenn er in die Quere geschieht.

5. Auf die verschiedenen regel- und ebenmäßigen Körper angewendet, zeigen sich folgende Fälle:

1) Das Sechsflach wird durch einen Querschnitt ch drei Eckpunkte in zwei gleiche Vierflach getheilt.

2) Das Achtflach wird durch einen Schnitt, wel- r durch je vier Eckpunkte geht, die in einer Ebene gen, in zwei gleiche vierseitige Spitzsäulen getheilt. olcher Schnitte sind bei diesem Körper vier möglich. schehen sie alle vier, so wird der Körper dadurch in t gleiche Theile zerlegt.

3) Das Zwanzigflach kann durch zwei unter- ander gleichlaufende Schnitte in drei Theile geschnit- werden, wovon zwei einander gleich, und jeder ei- fünfseitige Spitzsäule ist. Diese Parallelschnitte nnen sechsmal (der einzele Schnitt zwölfmal) ge- ehen, wodurch der Körper in zwanzig gleiche Theile schnitten wird.

4) Der Würfel kann geschnitten werden:

a) Durch einen Kantenschnitt (d. i. durch 2 sich gegenüberliegende Kanten) in 2 gleiche drei- seitige Ecksäulen. — Durch 2 solcher Schnitte nach einer Richtung hin, wird er in vier solcher Eck- säulen getheilt.

b) Durch einen Parallelschnitt zerfällt der Würfel in 2 gleiche 4 seitige Ecksäulen, welche zur Grundfläche die halbe Umfangsfläche des Wür- fels haben. — Durch 2 solcher Schnitte nach ei- ner Richtung, d. i. durch einen Kreuzschnitt, wird der Körper in 4 gleiche Ecksäulen getheilt, welche zur Grundfläche das Viertel einer Umfangs- fläche haben. — Durch einen solchen Kreuzschnitt und einen queren Parallelschnitt wird der Würfel in 8 gleiche Würfel getheilt, deren jede Umfangs- fläche das Viertel der Grundfläche, und jede Kan- te die Hälfte der Kante des Ganzen ist. —

— Würde man, jede Kante des Würfels in 3 gleiche Theile theilen, und durch dieſe Drittel 3 Paar Parallelſchnitte thun, ſo würde der Körper in 27 gleiche Würfel zerfallen. Fig. M. Taf. VII. Hierauf beruht das Berechnen und Meſſen des körperlichen Inhaltes.

5) Die Eckſäulen laſſen ſich ſchneiden:

a) Durch Längenſchnitte, welche durch eine oder mehre Seitenkanten; durch eine oder mehre Flächen; durch Kante und Fläche zugleich gehen. Die Theile ſind jedesmal Eckſäulen.

b) Durch Querſchnitte, und zwar gleichlaufend oder ungleichlaufend mit den Endflächen.

c) urch Schnitte von einem Eckpunkt durch die beiden Eckpunkte an der gegenüberliegenden Endfläche, welche einander zunächſt liegen, wü dieſelbe in ſo viele gleiche Spitzſäulen zerlegt, als eine Endfläche derſelben Eckpunkte hat. Hierauf beruht das Meſſen und Berechnen der Spitzſäulen.

6) Alle regelmäßigen Körper laſſen ſich durch Anwendung der Schnitte anſehen, als ſeyen ſie von ſo vielen Spitzſäulen zuſammengeſetzt, als ſie Umfangsflächen haben, und welche alle ſich mit ihren Spitzen im Mittelpunkte des Körpers vereinigen. —

---

§. 58. Größe. Vergleichen. Meſſen.

1. Die dreiſeitige Eckſäule läßt ſich in drei gleiche dreiſeitige Spitzſäulen ſchneiden; daher iſt eine derſelben 1/3 des Ganzen. Da nun jede Eckſäule ſich in dreiſeitige ſchneiden läßt, ſo iſt überhaupt:

Jede Spitzſäule 1/3 einer Eckſäule, wel-

che mit ihr gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

2. Eine schiefe Eckſäule iſt einer ſenkchten gleich, welche mit ihr gleiche Grundäche und gleiche Höhe hat.

3. Auf dieſe Sätze hin läßt ſich der Raum-Inlt der Körper finden. Als Maß, als Einheit gilt : Würfel, und dieſer iſt, nach der Länge ſeiner Kanten: n Würfel-Zoll, wenn ſeine Kante einen Zoll,
- — -Fuß, — — — — Fuß,
- — -Meile — — — — Meile Länge hat.

4. Nach Fig. M. Taf. VII. ſtehen auf der Grundche 9 Würfel, und dieſe Würfelplatte iſt 3 mal rhanden, daher hat man 3.3.3 = 9.3 = 27 Würdarin. Man findet alſo den Raum-Inhalt eines ürfels, wenn man den Inhalt der Grundfläche mit r Höhe multiplizirt. — Auf gleiche Weiſe wird der auminhalt jeder graden Eckſäule gefunden. Iſt die kſäule ſchief, ſo darf man nur den Inhalt der rundfläche mit der ſenkrechten Höhe derſelben mulizíren.

5. Auch hier gibt es eine zehn- und eine zwölftilige Eintheilung. Ein Würfel-Fuß hat alſo in r zehntheiligen Eintheilung 10.10.10=100.10=1000 ürfel-Zoll; in der zwölftheiligen Eintheilung aber: .12.12 = 144.12 = 1728 Würfel-Zoll.

6. Da jede Spitzſäule 1/3 der Eckſäule iſt, welche t ihr gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat, findet man den Rauminhalt derſelben, wenn man r Inhalt ihrer Grundfläche mit ihrer Höhe multizirt, und das Produkt mit 3 dividirt.

7. Die regelmäßigen Körper ſind alle nach dem rhergehenden zu berechnen, denn:

1) Das Vierflach ist eine dreiseitige Spitzsäule, und sein Rauminhalt wird gefunden, wie bei dieser.

2) Das Achtflach läßt sich in 8 gleiche Spitzsäulen zerlegen, welche gleiche Grundflächen und gleiche Höhe haben; man darf also nur den Rauminhalt einer derselben auf die bisherige Weise suchen, und das Gefundene 8 mal nehmen. So ist es beim Zwölfflach 12 mal, und beim Zwanzigflach 20 mal.

8. Der Kegel ist eine Spitzsäule von sehr vielen Seitenflächen; daher ist sein Rauminhalt ebenfalls gleich dem Drittel des Produktes aus seiner Grundfläche in seine Höhe. — Ebenso ist die Walze eine Ecksäule von sehr vielen Seiten, und daher wird ihr Rauminhalt wie bei jener gefunden.

9. Die Oberfläche der Kugel in ganz kleine Felder zerlegt, kann als ein regelmäßiger Körper von sehr vielen Umfangsflächen angesehen werden. Auf jede dieser Umfangsflächen kann man sich eine Spitzsäule denken, welche alle im Mittelpunkte der Kugel mit ihren Spitzen zusammentreffen, und welche alle den Halbmesser zur Höhe haben. Man wird also den Raum-Inhalt einer Kugel finden, wenn man ihre Oberfläche mit dem Drittel ihres Halbmessers, oder mit dem Sechstel ihres Durchmessers multiplizirt. — Die Oberfläche der Kugel aber ist 4 mal so groß, als die Fläche eines ihrer größten Kreise. — Es sei z. B. der Durchmesser einer Kugel 6 Zoll, so findet man den Umfang ihres größten Kreises in folgender Proportion:

$$100 : 314 = 6 : x$$

zu $\frac{6.314}{100} = \frac{3.157}{25}$. Multiplizirt man nun diesen Kreisumfang mit dem Viertel des Durchmessers, also

mit $^6/_4$, so erhält man seine Fläche zu: $\frac{3.157.6}{25.4} = \frac{3.157.3}{25.2}$. — Diesen Flächeninhalt 4 mal genommen, gibt den Kugeloberfläche-Inhalt zu: $\frac{4.3.157.3}{25.2} = \frac{2.3.157.3}{25}$. Multiplizirt man nun noch diesen Oberfläche-Inhalt mit dem Sechstel des Durchmessers, also mit 1, so erhält man für ihren Rauminhalt: $\frac{2.3.157.3.1}{25} = 113^1/_{25}$ Würfel-Zoll.

Anhang

zur

Formen- und Raumlehre.

Mit zwei Tafeln Steindruck.

§. 1. Zwei Größen, Linien, Winkel, Flächen, Körper, sind einander gleich, wenn beim Aufeinanderlegen oder Ineinanderschieben derselben ihre Grenzen genau ineinander fallen.

§. 2. Zwei Seiten eines Dreiecks sind größer als eine desselben.

Beweis. Fig. 1. — Dieser geht aus der Erklärung einer graden Linie natürlich hervor. Diese ist nämlich der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten; daher, wenn BC der kürzeste Weg zwischen B und C ist, so muß AB + AC größer seyn als BC.

§. 3. Zwei Dreiecke decken sich, wenn sie zwischen vier oder zwei Paar gleichen Seiten zwei gleiche Winkel haben.

Beweis. 1. Fig. 2. — Ist in a. die Seite AB = AC = DE = DG, und W. BAC = W. EDG, so decken sich beide Dreiecke; denn legt man DE auf AB, so daß D in A und E in B fällt, so wird, vermöge der Gleichheit der Winkel bei A und D auch DG auf AC und G in C fallen; alsdann muß EG auf BC fallen, weil zwischen zwei Punkten nur eine grade Linie möglich ist.

2. — Ist in b. die Seite MN = PQ, MO = PR und W. NMO = W. QPR, so werden sich beide Dreiecke decken; denn legt man wieder, wie vorher, das △ PQR auf das △ MNO, so wird man alles wahr finden, wie dort.

§. 4. Theilt man den Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks, welcher zwischen den gleichen Seiten liegt, in zwei gleiche Theile und zieht diese Theilungslinie an die gegenüberliegende Seite des Dreiecks, so entstehen dadurch:

1. Zwei sich deckende Dreiecke.

Beweis. Fig. 3. — Vermöge der Theilung ist W. BAD = W. CAD; nach der Natur des Dreiecks ist AB = AC, und die Seite AD ist für die beiden entstandenen Dreiecke gemeinschaftlich, kann also als zwei gleiche aufeinanderliegende Seiten betrachtet werden; daher haben die beiden Dreiecke BAD und CAD zwischen zwei Paar gleiche Seiten zwei gleiche Winkel, und sind also nach §. 3. einander gleich.

2. Den gleichen Seiten stehen gleiche Winkel gegenüber.

Denn weil △ BAD = △ CAD, so ist auch W. ABC = W. ACB.

3. Die Theilungslinie AD steht senkrecht auf der Mitte der gegenüberstehenden Seite BC.

Denn weil △ BAD = △ CAD, so ist auch BD = CD, und W. ADB = W. ADC = 1 R.

§. 5. Theilt man in einem gleichschenkligen Dreiecke die Seite in zwei gleiche Theile, welche dem ungleichen Winkel gegenüber liegt, und zieht eine Theilungslinie in den Winkel, so entstehen:

1. Zwei sich deckende Dreiecke. Fig. 3.

Denn: AB = AC, BD = CD und W. ABD = W. ACD, also △ BAD = △ CAD (§. 3.)

2. Der Winkel BAC ist in zwei gleiche Theile getheilt.

Denn weil △ BAD = △ CAD, so ist auch W. BAD = W. CAD.

3. Die Theilungslinie steht senkrecht auf BC.

Denn weil △ BAD = △ CAD, so ist auch W. ADB = W. ADC = 1 R.

§. 6. Hat ein Dreieck drei gleiche Seiten, so hat es auch drei gleiche Winkel.

Beweis. Fig. 1. — Weil AB = AC, so ist W. ACB = W. ABC; — weil AB = BC, so ist W. ACB = BAC; — weil AC = BC, so ist W. ABC = W. BAC.

§. 7. Zwei Dreiecke decken sich, wenn sie auf zwei gleichen Seiten vier oder zwei Paar gleiche Seiten haben.

Beweis. Fig. 2. a. — Es sey BC = EG, und W. ABC = ACB = DEG = DGE. Legt man EG so auf BC, daß G in C und E in B zu liegen kommt, so wird vermöge der Gleichheit der Winkel GD auf CA, ED auf BA und D auf A fallen; beide Dreiecke decken sich also.

Fig. 2. b. — Es sey NO = QR, W. MNO = PQR und W. MON=PRQ. Legt man nun wieder QR auf NO, daß R in O und Q in N fällt, so wird man alles Uebrige wie vorher finden.

§. 8. Zwei Dreiecke decken sich, wenn die drei Seiten des einen einzeln genommen den drei Seiten des andern gleich sind.

Beweis. Fig. 4. — Es sey AB = DE, AC = DF und BC = EF. — Legt man nun die Seite BC so auf EF, daß B in E, C in F und A dem Punkte D gegenüber liegt, zieht alsdann AD, so ist, weil DF = AF, auch W. FDA = W. FAD (§. 4. 1.); — ebenfalls, weil DE = EA, so ist auch W. DEF = W. AEF, mithin ist W. EDF = W. BAC, und beide Dreiecke ABC und

DEF haben zwischen zwei Paar gleichen Seiten zwei gleiche Winkel, und decken sich nach §. 3. —

§. 9 Zwei Dreiecke decken sich, wenn sie zwei gleiche Seiten haben, und zwei Paar gleiche Winkel, welche nicht alle auf den gleichen Seiten liegen.

Beweis. Fig. 4. — Es sey BC=EF; W. ABC= W. DEF und W. BAC = W. EDF. — Legt man EF auf BC, so daß F in C und E in B zu liegen kommt, so muß ED in BA, also D in A fallen; da nun zwischen zwei Punkten A und C nur eine grade Linie möglich ist, so muß auch DF auf AC fallen.

§. 10. Zwei Dreiecke decken sich, wenn sie zwei Paar gleiche Seiten haben, und zwei gleiche Winkel, welche nicht zwischen den gleichen Seiten liegen.

Beweis. Fig. 4. — Es sey AB = DE, AC = DF und W. ABC = W. DEF. — Legt man wieder BC auf EF wie Fig. 4. DEAF ausweiset, so ist deutlich, daß W. EDF = W. BAC ist, und also die beiden Dreiecke sich decken müssen (§. 7).

§. 11. Den gleichen Winkeln eines gleichschenkligen Dreiecks stehen gleiche Seiten gegenüber.

Beweis. Fig. 3. — Ist W. ABD = W. ACD, und man zieht AD von der Mitte BC, so ist: BD = DC, AD gemeinschaftlich, und daher decken sich beide Dreiecke (§. 10), also ist AB = AC.

§. 12. Hat ein Dreieck drei gleiche Winkel, so hat es auch drei gleiche Seiten.

Beweis. Fig. 1. — Weil W. ABC = W. ACB, so ist AC = AB; — weil W. ABC = W. BAC, so ist AC = BC; — weil endlich W. BAC = W. ACB, so ist BC = AB (§. 11). —

§. 13. Dem größern Winkel eines Dreiecks steht auch die größere Seite gegenüber, und umgekehrt, der größern Seite, der größere Winkel.

Beweis. Fig. 5.

1. Ist der W. ACB größer als W. ABC, so ist auch die Seite AB größer als AC. Denn, man schneide durch CD den W. BCD = W. CBD, so ist CD = DB (§. 11.). Die Seite AC ist kleiner als AD + DC (§. 2.); es ist aber AD + DC = AD + DB = AB, folglich ist AC kleiner als AB.

2. Ist der W. ACB größer als W. ABC, so ist auch AB größer als AC; denn wäre AB = AC, so wäre W. ACB = W. ABC (§. 4. 2.), was gegen die Voraussetzung ist. Wäre AB kleiner als AC, so müsse W. ACB kleiner als ABC seyn, was ebenfalls gegen die Voraussetzung ist. Es muß also AB größer als AC seyn.

§. 14. Die Nebenwinkel einer Linie sind 2 R. gleich.

Beweis. Fig. 6. — Man ziehe AE senkrecht auf BC, so ist W. BAE = W. EAC = 1 R.; also W. BAE + EAC = 2 R.; nun ist aber W. BAE + EAC = W. BAD + DAC, mithin sind diese beiden Winkel ebenfalls 2 R. gleich.

§. 15. Wenn die zwei Nebenwinkel einer Linie 2 R. gleich sind, so bilden die beiden nicht gemeinschaftlichen Schenkel eine grade Linie.

Beweis. Fig. 7. Wäre AC nicht die Verlängerung von BA, so dürfte diese AE seyn; in diesem Falle aber wäre W. BAD + DAE = 2 R. Der Angabe nach ist aber auch W. BAD + DAC = 2 R.; daher wäre W. BAD + DAC = W. BAD + DAC. Zieht man nun auf beiden Sei-

ten dieser Gleichung die Größe BAD ab, so bleibt noch W. DAC = W. DAE, was unmöglich ist. Folglich ist AC die Verlängerung von AB.

§. 16. Wenn sich zwei grade Linien schneiden, so betragen die vier Winkel zusammen 4 R.

Beweis. Fig. 8. — W. AMD + DMB = 2 R. (§. 14.); ebenso W. AMC + CMB = 2 R. Also W. AMD + DMB + AMC + CMB = 4 R.

§. 17. Die Scheitelwinkel sind einander gleich.

Beweis. Fig. 8. — W. AMD + DMB = W. AMD + AMC. Zieht man auf beiden Seiten dieser Gleichung die Größe AMD ab, so bleibt W. DMB = W. AMC. — Aus ganz gleichem Grunde ist W. AMD = W. BMC.

§. 18. Von einem Punkte A Fig. 9. auf eine grade Linie BC ist nur eine senkrechte Linie möglich.

Beweis. — AB stehe senkrecht auf BC; gesetzt, es sey eine zweite senkrechte AC möglich. Man verlängere AB und BD = AB, und ziehe CD, so ist △ ABC = △ DBC (§. 3.), denn sie haben zwischen 2 Paar gleichen Seiten AB = BD und BC = BC zwei gleiche Winkel ABC = DBC = 1 R. Nach der Voraussetzung ist aber auch W. ACB = 1 R., mithin auch W. BCD, welcher ihm gleich ist. Wenn aber zwei anliegende W. = 2 R sind, so muß die Linie ACD eine grade seyn (§. 15.), woraus folgen würde, daß zwischen zwei Punkten A und D zwei verschiedene grade Linien gezogen werden könnten, was unmöglich ist. Also kann AC nicht senkrecht seyn.

§. 19. Die von einem Punkte A Fig. 9. auf EF gezogene senkrechte Linie AB ist die kürzeste, welche

von diesem Punkte an die grade Linie gezogen werden kann.

Beweis. — Weil △ ABC = △ DBC, so ist AB = BD und AC = CD; also AB die Hälfte von AD, und AC die Hälfte von AC + CD. Nun ist aber AD kleiner als AC + CD (§. 2), mithin ist auch AB kleiner als AC.

§. 20. Die beiden schiefen Linien AF und AC, Fig. 9. in gleichen Abständen BF und BC von der Senkrechten, sind gleich.

Beweis. — Da BF = BC, AB gemeinschaftlich, und W. ABF = W. ABC, so ist △ ABF = △ ABC (§. 3), also AF = AC.

§. 21. Von zwei beliebigen schiefen Linien AC und AE, oder AF und AE Fig. 9. ist diejenige die größte, welche sich am weitesten von der Senkrechten entfernt.

Beweis. — Man ziehe CG senkrecht auf AC, so ist AC kürzer als AG (§. 19), mithin ist AC auch kürzer als AE.

§. 22. Wenn zwei grade Linien AC und BD Fig. 10, auf einer dritten AB senkrecht stehen, so sind diese beiden ersten Linien gleichlaufend, d. i. sie treffen sich bei ihrer Verlängerung niemals.

Beweis. — Gesetzt sie träfen sich, so sey dieses in irgend einem Punkte N über oder unter AB. In diesem Falle wären aber aus diesem Punkte N zwei senkrechte Linien auf AB möglich, was nach §. 18 unmöglich ist.

§. 23. Wenn zwei gleichlaufende Linien von einer dritten schief durchschnitten werden, so sind:

1. Die innern und äußern Gegenwinkel FBD und EAB, FBA und EAC, DBH und BAG, ABH und GAC einander gleich.

Beweis. Fig. 11. — Die Linie FH kann, bei unveränderter Neigung gegen CD der Linie EG näher kommen, und sie würde auf EG fallen, wenn der Durchschnittspunkt B auf A fiele. In diesem Falle würde auch W. FBD den W. EAB, und W. FBA den W. EAC decken u. s. w. sie sind also einander gleich.

2. Die innern Gegenwinkel FBA und EAB, ABH und BAG sind 2 R gleich.

Beweis. Fig. 11. — W. FBD + FBA = 2 R. (§. 14). Nun ist aber W. FBD = W. EAB, also ist auch W. FBA + EAB = 2 R.

3. Die äußern Gegenwinkel FBD + EAC oder DBH + CAG sind 2 R gleich.

Beweis. — W. CAE + EAB + ABF + FBD = 4 R. Da nun W. EAB + ABF = 2 R, so bleiben für W. CAE + FBD noch 2 R.

4. Die innern Wechselwinkel EAB und ABH, ABF und BAG; ebenso die äußern Wechselwinkel FBD und CAG, CAE und HBD sind einander gleich.

Beweis. — W. EAB = FBD, (No. 1 dieses §.), W. FBD = ABH (§. 17), also ist W. EAB = ABH. — Aus ganz gleichem Grunde sind die übrigen Wechselwinkel einander gleich.

5. Die innern und äußern Wechselwinkel EAB und DBH, FBA und CAG u. s. w. sind 2 R gleich.

Beweis. — W. EAB + ABF = 2 R (No. 2 dieses §.), W. ABF = DBH (§. 17), also ist W. EAB + DBH = 2 R. Aus gleichem Grunde sind auch die übrigen innern und äußern Wechselwinkel 2 R gleich.

§. 24. Die innern Winkel eines Dreiecks sind 2 R gleich.

Beweis. Fig. 12. — Man verlängere BC und ziehe EC gleichlaufend AB. — W. ACB + ACE + ECD = 2 R (§. 14); es ist aber W. ECD = ABC (§. 23 No. 1.), und W. ACE = BAC (§. 23 No. 4), also ist auch W. ACB + CBA + BAC = 2 R.

Folge. — Da W. ECD = ABC, und W. ACE = BAC, so ist W. ACD = W. ABC + BAC d. i. der Außenwinkel eines Dreiecks ist den beiden innern gleich, mit denen er nicht Nebenwinkel ist.

Zusatz. — Läßt man in jedem Eckpunkte eines Dreiecks eine Seite desselben durchgehen, so sind alle 6 W. zusammen 6 R gleich. — Zieht man in jedem Eckpunkte 2 Seiten des Dreiecks durch, so sind alle 12 W. = 12 R. Zieht man von diesen 2 R für die innern W. des Dreiecks ab, so bleiben für alle Außenwinkel 12 — 2 = 10 R.

§. 25. Die innern Winkel eines jeden beliebigen Vielecks sind doppelt so vielen R gleich, als Seiten in dem Vieleck sind, weniger 4 R.

Beweis. Fig. 13. — Nimmt man irgend einen beliebigen Punkt im Innern des Vielecks, etwa A an, so kann von diesem aus an jeden Eckpunkt des Vielecks eine Linie AB, AC ꝛc. gezogen werden, wodurch über jeder Seite des Vielecks ein Dreieck entsteht, dessen 3 innere W. = 2 R. sind, — hier 6. 2 = 12 R. Die 4 R. um den Punkt A gehören aber nicht zu den Winkeln des Vielecks, daher müssen diese von den 12 R. abgezogen werden.

§. 26. Die gegenüberstehenden Winkel eines Parallelogramms sind einander gleich.

Beweis. Fig. 14. — W. A + B = 2 R.; W A + C = 2 R. (§. 23 No. 2.), also W. A + B = A +

C, daher W. B = C. — Ferner: W. A + B = B + D, daher W. A = D.

§. 27. Die gegenüberliegenden Seiten eines Parallelogramms sind einander gleich.

Beweis. Fig. 15. — Man ziehe AC, so ist W. BAC = ACD und W. ACB = CAD (§. 23 No. 4) also △ ABC = △ ADC (§. 7); also ist AB = DC und AD = BC.

Folge. Eine Gere (Diagonale) theilt ein Parallelogramm in zwei sich deckende Dreiecke.

§. 28. Die zwei Geren eines Parallogramms theilen:

1. Das Parallelogramm in zwei Paar sich deckende Dreiecke.

Beweis. Fig. 16. — W. BAE = CDE, W. ABC = DCE, AB = CD, daher △ ABE = CDE. Aus ganz gleichem Grunde ist △ ACE = △ BDE.

2. Sie schneiden sich gegenseitig gleich.

Beweis. — Da △ ABE = △ CDE, so ist auch AE = DE und CE = BE.

§. 29. Theilt man eine Seite eines beliebigen Dreiecks in zwei gleiche Theile und zieht von der Mitte derselben eine Linie in den gegenüberstehenden Winkel, so wird das Dreieck in zwei gleichflächige Dreiecke getheilt.

Beweis. Fig. 17. — Es sey BD = DC. Man ziehe AE gleichlaufend BC und DE gleichlaufend AB, so ist △ ADE = △ ABD, und AE = DC. Ferner ist W. GAE = GCD und W. AEG = CDG, also △ AGE = △ CDG, also auch △ AAD = △ ADC, und da △ AED = △ ABD, so ist auch △ ADC = △ ABD.

§. 30. Die zwei Geren des Parallelogramms theilen daſſelbe in vier gleichflächige Dreiecke.

Beweis. Fig. 16. — Da AE = ED, ſo iſt △ AEB = △ DEB; weil BE = CE, ſo iſt △ FED = △ CED, mithin ſind alle vier Dreiecke gleichgroß.

§. 31. Die drei Geren des regelmäßigen Sechsecks durchſchneiden ſich im Mittelpunkte deſſelben.

Beweis. Fig. 18. — Man ziehe AD und CF, ſodann aus G die Linie BG und GE. Da AF = AB, FE = BC, ED = CD und alle Vieleckswinkel gleich ſind, ſo decken ſich die beiden Figuren AFED und ABCD, daher iſt W. FAD = BAD, W. ADC = ADE; aus gleichem Grunde iſt W. BCF = DCF und EFC = AFC.

Da der Vieleckswinkel $^8/_6 = {}^4/_3$ R., ſo iſt ſeine Hälfte $^2/_3$ R., alſo W. ADE + DEF = 2 R., mithin ſind AD, BC und FE, ebenſo CF, AB und DE gleichlaufend, ABCG und DEFG alſo Parallelogramme, oder vielmehr Rauten, welche durch BG und EG in gleichſeitige Dreiecke getheilt werden. Jeder Mittelpunktswinkel iſt alſo $^2/_3$ R., daher W. AGB + AGF + FGE = $^6/_3$ = 2 R., alſo BGE eine grade Line (§. 15).

Weil alle durch AD, BE und CF entſtandene Dreiecke gleichſeitig ſind, ſo iſt jede Gere doppelt ſo groß, als eine Seite des Sechsecks, und der Punkt G liegt gleichweit von jedem Eckpunkt des Sechsecks entfernt.

Zieht man HG von der Mitte AF und KG von der Mitte AB, ſo iſt HG = KG, und überhaupt alle Linien von der Mitte der Seiten in G gezogenen Linien ſind einander gleich, daher liegt auch

G gleichweit von der Mitte jeder Seite. Daher ist G der Mittelpunkt der Figur.

§. 32. Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind einander gleich.

Beweis. Fig. 19. — Man ziehe DE, welches die Verlängerung von AD und GE ist. △ BAE = CDG. Zieht man das gemeinschaftliche Stück DOE von beiden ab, so bleibt ABOD = EOCG. Setzt man zu jedem dieser Vierecke das △ BOC, so erhält man ABOD + BOC = EOCG + BOC d. i. ABCD = EBCG.

§. 33. Dreiecke von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind einander gleich.

Beweis. Jedes Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms; da die Ganzen unter obiger Bedingung gleich sind, so sind es auch die Hälften.

§. 34. Ein Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms, wenn es mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.

Beweis. Dieser geht ganz natürlich aus §. 32 und 33 hervor.

§. 35 Das Quadrat über der Hypothenuse AC Fig. 20. ist den beiden Quadraten über den Seiten AB und BC zusammengenommen gleich.

Beweis. — Man ziehe DC und BK, sodann BL gleichlaufend mit CH. Seite AK im △ AKB ist der Seite AC im △ ADC, und Seite AB im △ AKB ist der Seite AD im △ ADC gleich; W. DAC = BAK, also △ AKB = △ ADC. Es ist aber △ DAC die Hälfte von ABED, und △ AKB die Hälfte von AKLM (§. 34.) mithin ist ABED = AKLM.

Man ziehe ferner AG und BH, so ist Seite AC im △ ACG der Seite CH im △ BCH, und CG im △ ACG der Seite BC im △ BCH gleich, und W. ACG = BCH, daher △ ACG = △ BCH. Da aber wieder △ ACG die Hälfte von BCFG, und △ BCH die Hälfte von CHLM ist, so ist BCFG = CHLM, daher ADEB + BCFG = AKCH.

§. 36. Jeder Durchmesser theilt den Kreis und dessen Umfang in zwei gleiche Theile.

Beweis. Fig. 21. — Denn wenn man die Figur AFB auf ADB legt, indem man AB zur gemeinschaftlichen Seite macht, so muß der Bogen AFB genau auf den Bogen ADB fallen, weil sonst Punkte in dem einen oder in dem andern vorkommen müßten, welche nicht gleichweit vom Mittelpunkte des Kreises entfernt wären, was der Natur der Kreislinie zuwider ist.

§. 37. Jede Sehne ist kleiner als der Durchmesser.

Beweis. Fig. 21. — Man ziehe CD und CE, so ist CD + CB = AC + BC = AB. Es ist aber CD + CE größer als DE (§. 2.), mithin ist auch AB größer als DE.

§. 38. In einem Kreise (oder in gleichen Kreisen) liegen gleiche Bogen über gleichen Sehnen und umgekehrt.

Beweis. Fig. 22.

1. Ist Sehne AB = DE, so ist auch Bogen AB = DE. Man ziehe die Halbmesser AC, BC, DE und EC, so decken sich die beiden Dreiecke ACB und DCE (§. 8.); es wird also A in E und B in D, und folglich Bogen AB auf DE fallen.

2. Ist Bogen AB = DE, so ist auch Sehne AB = DE. Denn legt man den Ausschnitt ACB auf DCE, so fällt Bogen AB auf DE, also A in E und B in D, mithin auch Sehne AB auf DE.

§. 39. In einem Kreise (oder in gleichen Kreisen) stehen gleiche Mittelpunktswinkel auf gleichen Bogen, und umgekehrt.

Beweis. Fig. 22.

1. Da W. ACB = W. DCE, und AC = BC = DC = EC, so ist △ ACB = △ DCE (§. 3.), also ist AB = DE, daher Bogen AB = DE (§. 38.).

2. Ist Bogen AB = DE, so ist Sehne AB=DE, und da AC = BC, DC=EC, so ist △ ACB = △ DCE (§. 8.), also ist W. ACB = W. DCE.

§. 40. Der Mittelpunktswinkel ist doppelt so groß als der Umfangswinkel, wenn beide auf gleichen Bogen stehen.

Beweis. Fig. 23. — Es sey BCD der Mittelpunktswinkel, und BAD der Umfangswinkel, welche beide auf dem Bogen BED stehen. — Man ziehe ACE, so ist: W. DCE + ADC (§. 24. Folge.), und da W. ADC = CAD, so ist W. DCE doppelt so groß als W. DAC. — Aus ganz gleichem Grunde ist W. BCE doppelt so groß als W. BAC, daher ist auch W. BCD doppelt so groß als W. BAD.

Oder: Fig. 24. — W. BCD sey der Mittelpunkswinkel, und W. BAD der Umfangswinkel, welche beide auf dem Bogen BD stehen. — Es ist W. BCD = BAC + ABC; und weil W. BAC = ABC, so ist W. BCD doppelt so groß als W. BAC.

Oder endlich: Fig. 25. — Es sey W. BCD der Mittelpunktswinkel, und W. BAD der Umfangswinkel, welche beide auf dem Bogen BB stehen. — Es ist W. ECB doppelt so groß als W. BAC, und W. DCE doppelt so groß als W. CAD, daher bleibt W. BCD doppelt so groß als W. BAD.

§. 41. Der Umfangswinkel, welcher mit den Enden seiner beiden Schenkel auf den Enden des Durchmessers steht, ist 1 R.

Beweis. Fig. 26. — W. ACD ist doppelt so groß als W. BDC, und W. BCD doppelt so groß als W. ADC, daher ist W. ACD + BCD doppelt so groß als W. BDC + ADC. Nun ist aber W. ACD + BCD = 2 R., daher W. ADB = 1 R.

Folge. Der Umfangswinkel, welcher mit den Enden seiner beiden Schenkel auf einem kleinern Bogen als der Halbkreis steht, ist ein spitzer, und der auf einem größern Bogen, ein stumpfer Winkel.

§. 42. Eine senkrechte Linie aus dem Mittelpunkte eines Kreises auf eine Sehne desselben gezogen, theilt sowohl die Sehne, als den dazu gehörigen Bogen in zwei gleiche Theile.

Beweis. Fig. 27. — Man ziehe AC und BC. Weil CD senkrecht auf AB steht, so ist W. AOC = BOC; ferner ist AC = BC, und CO gemeinschaftlich, daher △ ACO = BCO (§. 10.), also ist auch AO = BO. — Aus der Gleichheit der Dreiecke folgt auch, daß W. ACD = BCD, und daher auch Bogen AD = BD (§. 39).

§. 43. Eine Linie vom Mittelpunkte eines Kreises auf die Mitte einer Sehne gezogen, steht senkrecht auf derselben.

Beweis. Fig. 27. — AC = BC, AO = BO, und CO gemeinschaftlich, daher ist △ AOC = △ BOC (§. 8.), also W. AOC = BOC = 1 R.

§. 44. Eine von der Mitte einer Sehne senkrecht gezogene Linie geht bei ihrer Verlängerung durch den Mittelpunkt des Kreises.

Beweis. — Denn gesetzt, OC Fig. 27. gehe nicht durch den Mittelpunkt des Kreises, so müßte BC größer oder kleiner seyn als AC, was sich, aber mit der senkrechten Stellung von OC nicht verträgt.

§. 45. Gleiche Sehnen sind gleichweit vom Mittelpunkte entfernt; — und von zwei ungleichen Sehnen ist die kleinste am weitesten vom Mittelpunkte entfernt.

Beweis. Fig. 28.

1. Man halbire die beiden gleichen Sehnen AB und DE durch die senkrechten Linien CF und CG, und ziehe BC und EC, so ist: BF = EG, BC = EC, und W. BFC = W. EGC, folglich △ BCF = △ ECG, also ist auch FC = GC, und die beiden Sehnen liegen gleichweit vom Mittelpunkte.

2. Es sey die Sehne BH größer als DE, so ist auch Bogen BAH größer als Bogen END. Man nehme nun Bogen BA = END und ziehe Sehne BA, alsdann die senkrechten FC und CI, so ist FC = CG; FC aber ist größer als OC, und OC größer als CI (§. 19.), also ist FC größer als CI, daher auch CG größer als CI.

§. 46. Die auf dem Endpunkte eines Durchmessers senkrecht stehende Linie ist eine Berührungslinie (Tangente) des Kreises.

Beweis. Fig. 21. — Jede schiefe Linie CG ist länger als die senkrechte CB (§. 19.), also liegt jeder Punkt G außerhalb der Kreislinie; daher hat die Linie BG den einen Punkt B mit der Kreislinie gemein, ist also Berührungslinie.

§. 47. Wenn sich zwei gleiche Kreise so schneiden, daß ihre Umringe gegenseitig durch die Mittelpunkte gehen, so schneiden sich die beiden graden Linien, welche zwischen den Durchschnittspunkten und den Mittelpunkten liegen, gegenseitig senkrecht in der Mitte.

Beweis. Fig. 29. — Man ziehe AC, AD und BD, so ist AC = AD = BD als Halbmesser eines oder gleicher Kreise; daher ist W. ACD = W. ADC, also △ ACE = △ ADE, und folglich CE = DE, auch W. AEC = W. AED = 1 R.

Ferner: Da AD = BD, so ist W. DAB = W. DBA, also △ DAE = △ DBE, mithin AE = BE.

Dasselbe ist auch der Fall, wenn sich die gleichen Kreise so schneiden, daß ihre Umfänge nicht durch ihre Mittelpunkte gehen.

Denn, Fig. 30. — CF = DE, also CE = DF. Nun ist △ ACO = △ ADO, also CO = DO, mithin auch FO = EO. — Ferner ist △ AOD = △ BOD, deßwegen AO = BO.

§. 48. Schneiden sich zwei ungleiche Kreislinien in zwei Punkten, so steht die grade Linie, welche ihre Mittelpunkte verbindet, senkrecht auf der Mitte der Sehne, welche die Durchschnittspunkte verbindet.

Beweis. Fig. 31. — Dieser folgt aus dem Vorigen leicht, denn es ist △ ANC = BNC, also BN = AN, und W. ANC = W. BNC = 1 R.

§. 49. Winkel am Umfange eines Kreises, welche auf gleichen Bogen stehen, sind gleich.

Beweis. Fig. 32. — Man ziehe BC und DC, so ist W. BCD doppelt so groß als W. BED, auch doppelt so groß als W. BAD (§. 40.), daher ist W. BED = W. BAD.

§. 50. Der Winkel BAG Fig. 33, zwischen einer Berührungslinie AG und einer Sehne AB ist gleich dem Winkel ADB, welcher mit seinen Schenkeln auf den Enden dieser Sehne und mit seiner Spitze im Umfange der Kreislinie steht.

Beweis. — Man ziehe den Durchmesser AE und die Sehne BE. — W. ABE = 1 R. (§. 41.), daher W. BAE + BEA = 1 R. Es ist aber W. BAE + W. BAG = 1 R. (§. 46.), daher W. BAE + BEA = W. BAE + BAG, also W. BAG = W. BEA; es ist aber W. BEA = W. ADB (§. 49.), daher ist W. BAG = W. ADB.

---

§. 51. Der Inhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkte aus seiner Grundlinie in seine Höhe.

§. 52. Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich der Hälfte des Produktes aus seiner Grundlinie in seine senkrechte Höhe.

§. 53. Rechtecke von gleicher Grundlinie verhalten sich, wie ihre Höhe, und bei gleicher Höhe, wie ihre Grundlinie.

Bemerkung. — Diese drei Sätze haben in der Formenlehre ihre volle Klarheit gefunden, wo man sie nachsehen kann.

§. 54. Zwei beliebige Rechtecke verhalten sich, wie die Produkte ihrer Grundlinien in die Höhen.

Beweis. Fig. 34. — Es sey ABCD das eine und AEFG das andere Rechteck. Man lege sie an einander, wie die Figur ausweiset, und verlängere CD und FE bis sie sich in H schneiden, so hat man:

ABCD : AEHD = AB : AE (§. 53.); ferner:

AEHD : AEFG = AD : AG.

Multiplizirt man die Glieder beider Proportionen der Reihe nach, so erhält man:

ABCD × AEHD : AEHD × AEFG = AB × AD : AE × AG;

läßt man nun in den beiden vordern Gliedern das gemeinschaftliche Glied AEHD weg, so hat man:

ABCD : AEFG = AB × AD : AE × AG.

§. 55. Wenn zwei Dreiecke einerlei Höhe haben, so verhalten sie sich in Ansehung ihrer Flächen, wie ihre Grundlinien.

Beweis. Fig. 35. — $\Delta ABD = BD \times \frac{AG}{2}$; $\Delta ACD = CD \times \frac{AG}{2}$, also:

$\Delta ABD : \Delta ACD = BD \times \frac{AG}{2} : CD \times \frac{AG}{2} =$

$BD \times CD$. —

§. 56. Nimmt man in einer Seite eines Dreiecks einen willkührlichen Punkt, und zieht durch diesen eine Linie gleichlaufend mit einer Seite des Dreiecks, so werden die beiden Seiten, durch welche die Linie geht, in verhältnißmäßige Theile getheilt.

Beweis. Fig. 36. — Man ziehe BE und CD, so hat man: $\Delta ADE : \Delta BED = AD : BD$ (§. 55); ferner: $\Delta ADE : \Delta CDE = AE : EC$. Nun ist

aber △ BED = CDE, darum hat man nun auch: AD : AE = BD : CE.

§. 57. Halbirt man einen Winkel eines Dreiecks und zieht die Theilungslinie an die gegenüberstehende Seite, so stehen die Schenkel in demselben Verhältniß, wie die Theile der getheilten Linie.

Fig. 37. — Man theile W. BAC in 2 gleiche Theile und ziehe AD, so hat man AB:AC=BD:DC.

Beweis. — Man ziehe BG gleichlaufend mit AD und verlängere AC bis sie sich mit G schneidet, so ist: W. DAC = BGA, W. DAB = ABG; da aber W. DAC = W. DAB. so ist auch W. AGB = ABG, daher ist AG = AB. Nun ist aber: AG : AC = BD : DC, und weil AG = AB, so ist: AB : AC = BD : DC.

§. 58. In gleichwinkeligen Dreiecken sind die ähnlichliegenden Seiten in gleichem Verhältniß, und die Dreiecke sind ähnlich.

Beweis. Fig. 38. — Man lege zwei ähnlichliegende Seiten BC und CE in eine Linie, verlängere ED und BA bis sie sich in F schneiden, so hat man: DE : DF = CE : BC; da aber DF = AC, so hat man: DE : AC = EC : BC. — Ferner hat man: AB : AF = BC : EC; da aber AF = CD, so hat man: AB:CD=BC:EC also im Ganzen:

AB : CD = AC : DE = BC : EC,

und die Dreiecke sind ähnlich. —

§. 59. Zwei Dreiecke, deren ähnlich liegende Seiten in gleichem Verhältniß stehen, sind gleichwinkelig und ähnlich.

Beweis. Fig. 39. — Es sey BC:EF = AB:DE = AC:DF, so ist auch W. A = D, B = E und C = F. —

Man mache in E den W. FEG = B, und in F den Winkel EFG = C, so wird der dritte W. G = A, und die beiden Dreiecke ABC und EFG werden gleichwinkelig seyn; folglich hat man: BC : EF = AB : EG. Nach der Voraussetzung aber ist: BC : EF = AB : DE, also ist EG = DE.

Ferner hat man: BC : EF = AC : FG; aber nach der Voraussetzung hat man: BC : EF = AC : DF, also ist FG = DF, daher sind in den beiden Dreiecken EGF und DEF die drei Seiten einzeln gleich, also auch die Dreiecke (§. 8.). Nach der Zeichnung sind die Dreiecke EGF und ABC gleichwinkelig, folglich sind die Dreiecke DEF und ABC auch gleichwinkelig und ähnlich.

§. 60. Zwei Dreiecke, welche zwischen gleich proportionirten Seiten einen gleichen Winkel haben, sind ähnlich.

Beweis. Fig. 40 — Man schneide AG = DE, und ziehe GH gleichlaufend mit BC, so sind die beiden Dreiecke AGH und ABC gleichwinkelig, und man hat: AB : AG = AC : AH. Der Angabe nach ist aber: AB : DE = AC : DF; da aber AG = DE, so ist auch AH = DF. Die beiden Dreiecke AGH und DEF sind also gleich (§. 3). Da aber die Dreiecke ABC und AGH ähnlich sind, so sind es auch die Dreiecke ABC und DEF. —

§. 61. Beliebige grade Linien AF, AG ꝛc. Fig. 41. durch den Eckpunkt eines Dreiecks gezogen, theilen die Grundlinie desselben, und jede mit ihr gleichlaufende Linie DE in gleichem Verhältniß, so daß: DI : BF = IK : FG = KL : GH = LE : HC.

Beweis. Fig. 41. — Denn weil DE gleichlaufend mit BC ist, so hat man: DI : BF = AI : AF. Aus gleichem Grunde hat man auch: AI : AF = IK : FG. Also wegen dem gemeinschaftlichen Verhältniß AI : AF hat man: DI : BF = IK : FG. Ganz auf dieselbe Weise findet man noch die Proportionen:

IK : FG = KL : GH.
KL : GH = LE : HC.

woraus hervorgeht:

DI : BF = IK : FG = KL : GH = LE : HC.

§. 62. Zieht man aus dem rechten Winkel eines Dreiecks BAC Fig. 42. eine Linie AD senkrecht auf die gegenüberliegende Seite BC, so sind:

1. Die beiden Dreiecke BAD und DAC unter sich und dem ganzen Dreieck ABC ähnlich.

Beweis. — W. BAD + ABD = 1 R.; W. BAD + DAC = 1 R; daher W. BAD + ABD = W. BAD + DAC, folglich W. ABD = W. DAC. W. ADB = W. ADC = 1R, mithin W. BAD = W. ACD und △ BAD ähnlich △ ADC. — Aus gleichem Grunde ist △ BAD und ADC ähnlich dem △ ABC. —

2. Jede Seite AB oder AC ist die mittlere Proportionallinie zwischen der Linie BC und dem anliegenden Abschnitte BD oder DC.

Beweis. — Weil die Dreiecke BAD und DAC ähnlich sind, so stehen ihre gleichliegenden Seiten in gleichem Verhältniß, daher hat man:

BD : BA = BA : BC.
DC : AC = AC : BC.

3. Die senkrechte Linie AD ist die mittlere Proportionallinie zwischen den beiden Abschnitten BD und DC.

Beweis. — Denn aus der Aehnlichkeit der Dreiecke hat man:

$$BD : AD = AD : DC.$$

§. 63. Der Inhalt zweier Dreiecke, welche einen gleichen Winkel haben, verhält sich, wie die Rechtecke unter den Seiten, welche den gleichen Winkel einschließen.

Beweis. Fig. 43. — Man ziehe BE, so hat man:

$$\triangle ABE : \triangle ADE = AB : AD;$$

und $\triangle ABC : \triangle ABE = AC : AE.$

Multiplizirt man die Glieder dieser Proportionen der Reihe nach, so erhält man:

$$ABE \times ABC : ADE \times ABE = AB \times AC : AD \times AE.$$

Läßt man nun im ersten Verhältniß das gemeinschaftliche Glied ABE weg, so hat man:

$$\triangle ABC : \triangle ADE = AB \times AC : AD \times AE.$$

§. 64. Zwei ähnliche Dreiecke verhalten sich, wie die Quadrate ihrer gleichliegenden Seiten.

Beweis. Fig. 40. — Es sey W. A = D, B=E und C=F, so hat man zuerst (§. 63): $\triangle ABC : \triangle DEF = AB \times AC : DE \times DF.$

Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke aber hat man: $AB : DE = AC : DF$. Multiplizirt man mit folgender: $AC : DF = AC : DF$, so erhält man: $AB \times AC : DE \times DF = AC^2 : DF^2$. Also ist auch: $\triangle ABC : \triangle DEF = AC^2 : DF^2$.

§. 65. Aehnliche Vielecke sind aus einer gleichen Anzahl von ähnlichen Dreiecken zusammengesetzt, welche gegeneinander einerlei Lage haben.

Beweis. Fig. 44. — Man ziehe aus den gleichliegenden Ecken A und F die Geren AC und AD, TH und FI. — Weil die Vielecke ähnlich sind, so ist W. ABC = W. FGH, und die Seite AB:

FG = BC : GH, daher △ ABC ähnlich dem △ FGH. Aus ganz gleichem Grunde ist △ ADE ähnlich △ TIK. Weil nun die Dreiecke ABC und FGH ähnlich sind, so ist W. BCA = W. GHF, und da W. BCD = W. GHI, so ist W. ACD = W. FHI, wodurch denn die Aehnlichkeit der Dreiecke CAD und HFI hervorgeht.

Auch umgekehrt: Zwei Vielecke sind ähnlich, wenn sie aus gleicher Anzahl von ähnlichen und ähnlichliegenden Dreiecken zusammengesetzt sind.

Denn da die verschiedenen Dreiecke ähnlich sind, so ist W. ABC = W. FGH, W. BCA = GHI, ACD = FHI, folglich BCD = GHI; ebenso ist W. CDE = HIK. Ferner ist: AB : FG = BC : GH = AC : FH = CD : HI, also haben die beiden Vielecke gleiche Winkel und proportionale Seiten, sie sind daher ähnlich.

§. 66. Die Theile, in welche sich Sehnen eines Kreises AB und CD Fig. 45. schneiden, stehen umgekehrt in gleichem Verhältniß.

Beweis. — Man ziehe AC und BD. In den Dreiecken AOC und BOD sind die Scheitelwinkel bei O gleich; ferner ist W. C = B und A = D (§. 49.), folglich sind die Dreiecke AOC und BOD ähnlich, und ihre ähnlichliegenden Seiten geben die Proportion:

AO : DO = CO : BO.

§. 67. Zieht man zwei Sehnen, welche sich außerhalb des Kreises schneiden, so verhalten sich die ganzen Linien umgekehrt, wie ihre außerhalb des Kreises liegenden Theile.

Beweis. Fig. 46. — Denn zieht man AC und BD, so haben die beiden Dreiecke OBD und

OAC den W. O gemeinschaftlich; ferner ist W. B = W. C (§. 49.), also sind die beiden Dreiecke OBD und OAC ähnlich, und die ähnlichliegenden Seiten geben die Proportion:

$$AO : DO = CO : BO .$$

§. 68. Zieht man eine Berührungslinie OA Fig. 47. und eine Sehne, welche die Berührungslinie schneidet, so ist die Berührungslinie die mittlere Proportionallinie zwischen der ganzen Linie OC und den außerhalb des Kreises liegenden Theilen OD.

Beweis. — Denn zieht man AD und AC, so haben die beiden Dreiecke OAD und OAC den W. gemeinschaftlich; ferner ist W. OAD = W. ACD (§. 50.), mithin sind die Dreiecke OAD und OAC ähnlich, und die ähnlichliegenden Seiten geben die Proportion:

$$OC : OA = OA : OD.$$

§. 69. Der Inhalt eines regelmäßigen Vielecks ist gleich dem Produkte seines Umfangs in die Hälfte vom Halbmesser des eingeschriebenen Kreises.

Beweis. Fig. 48. — Es sey das Vieleck A, B, C u. s. w. gegeben, so hat das △ AOB zum Maße $AB \times \frac{1}{2}$ OG, und das △ OBC hat zum Maße $BC \times \frac{1}{2}$ OH. Nun ist OH = OG, also haben die beiden Dreiecke AOB und BOC zusammen zum Maße $(AB + BC) \times \frac{1}{2}$ OG. Fährt man so fort, so erhält man für das Maß aller Dreiecke, d. i. für das Vieleck: $(AB + BC + CD + DE + EF + FA) \times \frac{1}{2}$ OG.

§. 70. Der Inhalt eines Kreises ist gleich dem Produkte seines Umfanges in die Hälfte seines Halbmessers (oder gleich der Hälfte des Produktes vom Umfange in den Halbmesser).

Beweis. — Je mehr Seiten eine regelmäßige Figur hat, desto näher kommt ihr Umfang dem des eingeschriebenen Kreises; daher ist der Kreis als eine regelmäßige Figur von sehr vielen Seiten anzusehen, deren Inhalt nach §. 69 gleich dem Produkte aus dem Umfange in den halben Halbmesser ist.

Zusatz 1. Daher ist der Ausschnitt eines Kreises ACB Fig. 49. gleich dem Produkte aus dem Bogen AB in den halben Halbmesser AC. —

Zusatz 2. Der Durchmesser eines Kreises verhält sich zum Umfange desselben, wie 1 : 3 14/100. Kennt man also den Umfang oder den Durchmesser eines Kreises, so kann man das andere Stück und den Flächeninhalt finden.

Aufgaben.

1. Eine grade Linie in zwei gleiche Theile zu theilen.

Bemerkung. Das Verfahren bei der Auflösung dieser Aufgabe ist ganz das in §. 24. der Formenlehre angegebene, und beruht auf §. 47 des Anhangs.

2. Durch einen in der Linie BC gegebenen Punkt A Fig. 50. auf diese Linie eine andere senkrecht zu ziehen.

Auflösung. — Man nehme B und C in gleicher Entfernung von A, beschreibe aus ihnen mit einem Halbmesser, der größer ist als BA zwei Bogen in D, und ziehe AD. — §. 4 und 5 des Anhangs.

3. Von einem außerhalb der graden Linie BD Fig. 51. gegebenen Punkte A eine Senkrechte auf BD zu fällen.

Aufl. — Man beschreibe aus A den Bogen BD, welcher die Linie BD in 2 Punkten schneidet, suche mit dem Zirkel einen Punkt E gleichweit von B und D, ziehe alsdann AE, so ist diese senkrecht auf BD. — §. 48. des Anhangs.

4. In dem Punkte A der Linie AB Fig. 52. einen Winkel zu beschreiben, welcher dem gegebenen Winkel K gleich ist.

Aufl. Man beschreibe aus K mit beliebiger Zirkelöffnung den Bogen ML, und mit derselben Oeffnung aus A den Bogen BO; sodann nehme man die Zirkelöffnung LM und beschreibe damit aus B einen Bogen, welcher den Bogen BO in D schneidet, und ziehe BD, so ist W. LKM = W. DAB. — §. 39. des Anhangs.

5. Einen gegebenen Bogen oder Winkel in zwei gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

1. Der Bogen AB Fig. 53. soll in zwei gleiche Theile getheilt werden. Man beschreibe aus A und B mit einerlei Halbmesser 2 Bogen, welche sich in D schneiden, ziehe sodann CD, so theilt diese den Bogen in E in zwei gleiche Theile. — Aufgabe 3 und §. 48. des Anhangs.

2. Der Winkel ACB soll in zwei gleiche Theile getheilt werden. Man beschreibe aus C den Bogen AB, und verfahre wie vorher. — §. 39 des Anhangs.

Bemerkung. — Durch Fortsetzung dieses Verfahrens kann man einen Winkel und Bogen in 2, 4, 8, 16 ꝛc. gleiche Theile theilen.

6. Durch einen gegebenen Punkt A Fig. 54. eine Gleichlaufende mit der gegebenen BC zu ziehen.

Aufl. Man beschreibe aus A mit einem hinreichend großen Halbmesser den Bogen EO, und mit demselben Halbmesser aus E den Bogen AF, schneide ED = AF und ziehe AD, so ist diese die verlangte Gleichlaufende. — §. 23. No. 4 des Anhangs.

7. Aus zwei gegebenen Winkeln A und B eines Dreiecks den dritten zu finden.

Aufl. — Fig. 55. Man ziehe DE, beschreibe (nach Aufgabe 4) W. DCF = W. A, und W. ECG = W. B, so ist W. FCG der gesuchte Winkel des Dreiecks. — §. 24 des Anhangs.

8. Mit zwei gegebenen Seiten B und C Fig. 56. eines Dreieckes und dem eingeschlossenen Winkel A das Dreieck zu beschreiben.

Aufl. Man ziehe die unbestimmte Linie DF, mache nach Aufgabe 4 im Punkte D den W. EDF = A, schneide sodann DG = B und DH = C, ziehe GH, so ist DGH das verlangte Dreieck.

9. Mit einer gegebenen Seite und zwei gegebenen Winkeln eines Dreiecks das Dreieck zu beschreiben.

Hier können zwei Fälle eintreten:

1. Die beiden gegebenen Winkel liegen auf der gegebenen Seite.

Aufl. Man beschreibe in den Endpunkten der gegebenen Seite die beiden gegebenen Winkel nach Aufgabe 4, und verlängere die beiden Schenkel derselben, bis sie sich schneiden.

2. Einer der gegebenen Winkel liegt an der gegebenen Seite, der andere aber liegt ihr gegenüber.

Aufl. Man suche zu den beiden gegebenen Winkeln den dritten nach Aufgabe 7, so hat man auch den andern an der gegebenen Seite liegenden Winkel gefunden. Man verfahre nun wieder wie vorher.

10. Mit den drei gegebenen Seiten eines Dreiecks das Dreieck zu beschreiben.

Aufl. Man mache Fig. 57. DE = A, beschreibe mit B aus E einen Bogen, und aus D einen andern mit C, welche sich in F schneiden, ziehe alsdann EF und DF, so ist das Verlangte geschehen.

Bemerk. Wenn eine der gegebenen Seiten größer wäre als die Summe der beiden übrigen, so würden sich die beiden Bogen aus E und D nicht schneiden, und das Dreieck wäre unmöglich zu beschreiben.

11. Mit zwei gegebenen Seiten A und B Fig. 58. eines Parallelogramms und dem Winkel C den sie einschließen, das Parallelogramm zu verzeichnen.

Aufl. Man ziehe DE = A, mache in D den Winkel FDE = C, schneide DF = B, beschreibe mit DE einen Bogen aus F, und mit DF aus E, welche sich in G schneiden, ziehe nun FG und EG, so ist das Verlangte geschehen.

Bemerk. Ist der gegebene W. = 1 R., so wird die Figur ein Rechteck; sind zugleich alle Seiten gleichgroß, so wird sie ein Quadrat.

12. Den Mittelpunkt eines Kreises oder Bogens zu finden.

Aufl. Fig. 59. — Man nehme in dem Kreisumfange oder Bogen drei Punkte A, B und C, ziehe AB und BC, theile dieselben in zwei gleiche Theile (nach

Aufgabe 1), so werden sich die Linien DE und FG in dem Mittelpunkte O schneiden.

Bemerk. Ganz auf gleiche Weise beschreibt man auch einen Kreis durch die drei Eckpunkte eines Dreiecks.

13. Durch einen gegebenen Punkt eine Berührungslinie an einen gegebenen Kreis zu ziehen.

Aufl. 1. Fig. 60. — Liegt der gegebene Punkt A in dem Kreisumfange, so zieht man den Halbmesser AC, sodann, nach Aufgabe 2, DA senkrecht, so ist DA die verlangte Berührungslinie. — §. 46 des Anhangs.

Aufl. 2. Fig. 61. — Liegt der Punkt A außerhalb des Kreises, so verbinde man ihn mit dem Mittelpunkte C durch AC, halbire diese in O und beschreibe aus O mit OC einen Kreis, welcher den gegebenen Kreis in B und D schneidet, ziehe AB und AD, so sind diese Berührungslinien. Denn W. CDA und CBA = 1 R. — §. 41 des Anhangs.

14. Einen Kreis in ein gegebenes Dreieck zu beschreiben.

Aufl. Fig. 62. — Man theile durch die Linien AO und BO die W. A und B in zwei gleiche Theile (nach Aufgabe 5), ziehe sodann OD, OE und OF senkrecht, so sind diese drei Linien einander gleich, folglich sind sie auch die Halbmesser eines Kreises, welcher durch D, E und F geht.

15. Eine gegebene grade Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Bemerk. Das Verfahren ist das in §. 24., Theilung der Linie, in der Formenlehre angegebene, und beruht auf §. 56 des Anhangs.

16. Zu drei gegebenen graden Linien A und B Fig. 53. die vierte Proportionallinie zu finden.

Aufl. — Man ziehe die beliebigen Linien DE und DF unter beliebigem Winkel, nehme auf DE das Stück DG = A und auf DF das Stück DH = C, ziehe alsdann GH, ferner schneide man DJ = B und ziehe durch J die Linie JK gleichlaufend mit JK, so hat man: DG : DJ = DH : DK; also ist DK die gesuchte vierte Proportionallinie. — §. 56 des Anhangs.

17. Zu zwei gegebenen Linien A und B Fig. 64. die mittlere Proportionallinie zu finden.

Aufl. — Auf der unbestimmten Linie CD nehme man DF = A und EF = B, beschreibe über DE den Halbkreis und ziehe FG senkrecht in F, so ist diese die gesuchte Linie; denn zieht man DG und EG, so hat man: DF : FG = FG : FE. — §. 62 No. 3 des Anhangs.

18. Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Aufl. Fig. 64. — Es sey B die Länge und A die Breite des gegebenen Rechtecks; so suche man nach Aufgabe 17 die mittlere Proportionallinie, welche FG ist, so hat man in FG die Seite des zu findenden Quadrats; denn aus der Proportion: DF : FG = FG : FE geht hervor, daß DF × FE = FG^2 ist. —

19. Ein beliebiges Vieleck in ein Quadrat zu verwandeln.

Aufl. 1. Das Dreieck ABC Fig. 65. — Man theile BC in 2 gleiche Theile, ziehe AE gleichlaufend mit BD und DE gleichlaufend mit AB, so ist △ ABC = Parallelogr. ABDE. Ferner ziehe man AF und EG senkrecht auf BC, so

ist Rechteck AFGE = Parallelogr. ABDE, mithin auch dem △ ABC gleich. Dieses Rechteck läßt sich leicht nach Aufgabe 18 in ein Quadrat verwandeln, mithin auch dadurch das △ ABC. —

2. Das Vieleck ABCDE Fig. 66.

Man ziehe AC, sodann BF gleichlaufend mit AC, bis sie sich mit der verlängerten DC in F schneidet, und ziehe sodann AF, so ist △ ACF = △ ACB (§. 33 des Anhangs), also ist auch AFDE = ABCDE.

In dem Viereck AFDE ziehe man AD, sodann EG gleichlaufend mit AD, bis sie sich mit der verlängerten CD in G schneidet, ziehe sodann AG, so ist △ ADG = ADE, mithin △ AFG = AFDE, also auch ABCDE gleich. — Dieses △ AFG behandle man nach dem ersten Falle dieser Aufgabe, und das Vieleck ABCDE ist in ein ihm gleiches Quadrat verwandelt.

20. Ein Quadrat zu zeichnen, welches so groß ist als die Summe oder der Unterschied zweier gegebener Quadrate.

Aufl.

1. Fig. 67. — Es sey AC die Seite des einen, und AB die des andern der gegebenen Quadrate. Man stelle AB senkrecht auf den Endpunkt von AC, so ist: $BC^2 = AC^2 + AB^2$ (§. 35 des Anhangs); mithin ist BC die Seite des zu suchenden Quadrats.

2. Fig. 68. — Es sey BC die Seite des einen, und AC die des andern Quadrats. Man beschreibe über BC einen Halbkreis, lege von C an die gegebene AC in den Umfang, und ziehe AB, so ist

dieſe die Seite des geſuchten Quadrats, welches dem Unterſchiede zwiſchen BC^2 und AC^2 gleich iſt; denn: $AB^2 + AC^2 = BC^2$

daher: $AB^2 = BC^2 - AC^2$.

Bemerk. Daſſelbe Verfahren dient auch, ein Vieleck oder einen Kreis zu zeichnen, welcher der Summe oder dem Unterſchiede von 2 gegebenen gleich iſt.

21. Eine Entfernung AB Fig. 69 zu beſtimmen, elche nicht unmittelbar gemeſſen werden kann.

Aufl. — Man ſtecke in C einen Stab, wodurch die Linien AC und BC bezeichnet ſind; man meſſe W. CAB und CBA, ſtecke in D einen andern Stab, mache W. CDE = CAB und W. CED = W. CBA, ſo iſt DE gleichlaufend mit AB, und man hat: CD : DE = CA : AB. Da man nun CD, DE und CA meſſen kann, ſo kann darnach AB berechnet werden. — Wäre z. B. CA = 24, CD = 9 und DE = 13 Fuß, ſo hätte man nach obiger Proportion $9 : 13 = 24 : \frac{13 \cdot 24}{9} = \frac{13 \cdot 8}{3} = \frac{104}{3} = 34\,2/3$ Fuß für AB.

22. Die Höhe eines Gegenſtandes BC Fig. 70. beſtimmen, zu deſſen Fuß man kommen kann, ohne n unmittelbar zu meſſen.

Aufl. Man ſtecke den Stab DE ſenkrecht ſo, daß man von A aus über ſeine Spitze weg nach C eine grade Linie ſieht, ſo iſt △ ABC ähnlich △ AED, und man hat:

$$AE : ED = AB : BC.$$

Da nun AB, AE und ED gemeſſen werden kann, ſo kann auch BC berechnet werden.

Berechnungen.

23. Eine arithmetische Reihe zu summiren.

Erklärung. Arithmetische Reihen sind Reihen solcher Zahlen, welche immer um eine bestimmte Zahl größer oder kleiner werden d. i. Zahlenreihen, deren Glieder um eine gewisse Zahl steigen oder fallen, z. B. 1, 2, 3, 4, 5, 6 . . . oder: 2, 4, 6, 8, 10 . . . oder: 3, 6, 9, 12 . . . oder: 25, 20, 15 . . . u. s. w. — In der Natur dieser Reihen liegt es, daß je zwei gleichabstehende Glieder derselben gleiche Summen ausmachen. z. B.

1	2	3	4	5	6
12	11	10	9	8	7
13	13	13	13	13	13

Darauf beruht nun der obigen Aufgabe

Auflösnng. Denn so oft die Reihe zwei gleichabstehende Gliederpaare hat, so oft enthält die Summe aller Glieder die Summe des ersten und letzten, oder des zweiten und vorletzten u. s. w. Kennt man also die Summe des ersten und letzten Gliedes, und die Anzahl der Glieder, so hat man die Summe der Reihe gefunden, wenn man jene Summe des ersten und letzten Gliedes mit der Hälfte der Anzahl aller Glieder multiplizirt. — Es ist auch leicht einzusehen, daß die Summe der Reihe gefunden wird, wenn man die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der Anzahl der Glieder multiplizirt, und dieses Produkt durch 2 dividirt. —

Es sey das erste Glied einer Reihe 3, und das zehnte 21, so ist die Summe $(3+21)\frac{10}{2} = 24 . 5 = 120$. Oder: $\frac{(3+21)\,10}{2} = \frac{24 . 10}{2} = \frac{240}{2} = 120$.

---

24. Die höchste Anzahl von Richtungen zu finden, in welchen eine gegebene Anzahl von Punkten unter einander liegen können.

Aufl. Es sey die gegebene Anzahl von Punkten 20, so liegt:

Der	1.	Punkt	in 0	Richtungen
—	2.	—	— 1	—
—	3.	—	— 2	—
—	4.	—	— 3	—
—	5.	—	— 4	—
also	— 20.	—	—19	—

Man hat hier eine Reihe zu summiren, deren erstes Glied = 0, und deren letztes = 19 ist; ihre Summe ist daher 19, und also die Summe aller Glieder $= \frac{20 . 19}{2} = 10 . 19 = 190$. —

Für Aufgaben dieser Art kann man auch die Summe der Reihe finden, wenn man die Anzahl der Glieder mit der um 1 geringern Zahl multiplizirt, und das Produkt durch 2 dividirt. Darnach bilden:

1 Punkt $\frac{1 . 0}{2} = 0$ Richtungen.

2 — $\frac{2 . 1}{2} = 1$ —

3 Punkte $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ Richtungen.

4 — $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ —

5 — $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ —

6 — $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ —

7 — $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ —

8 — $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ —

10 — $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ — u. ſ. w.

25. Berechnung, wie oft eine gewiſſe Anzahl Punkte oder andere Gegenſtände in andre Ordnung gebracht, oder wie oft ſie untereinander verſetzt werden können.

Aufl. 1) Zwei Punkte, welche a und b heißen mögen, können ſtehen: ab und ba.

2) Drei Punkte a, b und c. — Zwei Punkte geben ab und ba; kommt nun der dritte c zu ab, ſo gibt dieſes:

abc
acb
cab;

kommt er zu ba, ſo gibt dieſes abermals:

bac
bca
cba.

Die drei Punkte geben alſo im Ganzen 1 . 2 . 3 = 6 Fälle.

3) 4 Punkte. — Nimmt man hier wieder die 6 vorhergegangenen Fälle, und läßt die vierte Größe nach und nach in jedem dieser Fälle jede Stelle einnehmen, so erhält man:

bei: abc	acb	cab	bac	bca	cba
abcd	acbd	cabd	bacd	bcad	cbad
abdc	acdb	cadb	badc	bcda	cbda
adbc	adcb	cdab	bdac	bdca	cdba
dabc	dacb	dcab	dbac	dbca	dcba

Im Ganzen also 1. 2. 3. 4 = 24 Fälle. — Brächte man nun noch den fünften Punkt e hinzu, so würde dadurch bei abcd entstehen:

abcde
abced
abecd
aebcd
eabcd, also 5 Fälle, welches bei jedem der 24 vorhergegangenen Fälle statt fände, und also 5 . 24 = 120 d. i. 1 . 2 . 3 . 4 . 5 Fälle bilden würde.

Um also die höchste Anzahl der Versetzungen zu finden, multiplizirt man alle Glieder der natürlichen Reihe von 1 an bis zu der Zahl, welche die Menge der gegebenen Größen anzeigt. — Also geben:

2 Punkte 1 . 2;
3 " 1 . 2 . 3;
4 " 1 . 2 . 3 . 4;
5 " 1 . 2 . 3 . 4 . 5;
6 " 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6;
7 " 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7;
8 " 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8;
10 " 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10
Versetzungen.

26. Berechnung der höchsten Anzahl Durchschnittspunkte, welche eine gegebene Anzahl grader Linien bilden können.

Aufl. Zwei grade Linien können sich nur in einem Punkte schneiden; die 2te grade Linie bringt also 1 Punkt; die 3te Linie durchschneidet die 2 vorhergegangenen Linien, bringt also zu dem 1 Punkte noch 2 hinzu, so daß man hat: 1 + 2; — die 4te Linie durchschneidet die 3 vorherigen, bringt also noch 3 Punkte zu, so daß man hat: 1 + 2 + 3. Es entstehen also durch jede folgende Linie so viele Punkte mehr, als schon Linien vorhanden waren, so daß man hat:

1 Linie bildet höchstens 0 Punkte;
2 Linien bilden = 1 Punkt — — — = 1.
3 = = = 1 + 2 — — — — = 3.
4 = = = 1 + 2 + 3 — — — = 6.
5 = = = 1 + 2 + 3 + 4 — — = 10.
6 = = = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 — = 15.
7 = = = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21.

Sieht man aber die Sache so an:

Die 1te Linie bildet 0 Punkte,
= 2= = = 1 Punkt,
= 3= = = 2 Punkte,
= 4= = = 3 =
= 5= = = 4 =
= 6= = = 5 =
= 7= = = 6 =
= 8= = = 7 = u. s. w.

so hat man die Aufgabe auf die Summirung einer arithmetischen Reihe gebracht, und man hat wieder, nach Aufgabe 24:

1	Linie	bildet	höchstens	$\frac{1 \cdot 0}{2}$	= 0	Punkte.
2	Linien	bilden	höchstens	$\frac{2 \cdot 1}{2}$	= 1	"
3	"	"	"	$\frac{3 \cdot 2}{2}$	= 3	"
4	"	"	"	$\frac{4 \cdot 3}{2}$	= 6	"
5	"	"	"	$\frac{5 \cdot 4}{2}$	= 10	"
6	"	"	"	$\frac{6 \cdot 5}{2}$	= 15	"
7	"	"	"	$\frac{7 \cdot 6}{2}$	= 21	"
8	"	"	"	$\frac{8 \cdot 7}{2}$	= 28	"
30	"	"	"	$\frac{30 \cdot 29}{2}$	= 435	"

27. Berechnung der höchsten Anzahl von Durchschnittspunkten, welche eine gegebene Anzahl von Kreislinien unter einander bilden können.

Aufl. — Eine Kreislinie durchschneidet eine andere höchstens in 2 Punkten, so daß man hat: $1 \cdot 2 = 2$; — eine dritte durchschneidet jede der vorherigen in 2 Punkten, so daß man hat: $2 + 2 = 2 \cdot 2 = 4$; — eine vierte durchschneidet jede der vorherigen in 2 Punkten, so daß man hat: $2 + 2 + 2 = 3 \cdot 2 = 6$. — Es bringt also jede folgende Kreislinie so oft mal 2 Punkte mehr hinzu, als Linien schon vorhanden waren, so daß man hat:

Die 1te Kreislinie bildet 0 P.
" 2" " " 1 . 2 "
" 3" " " 2 . 2 "
" 4" " " 3 . 2 "
" 5" " " 4 . 2 "
" 6" " " 5 . 2 "
" 7" " " 6 . 2 "
" 8" " " 7 . 2 "

Man hätte also die natürliche Reihe von 1 bis [illegible] der um 1 geringern Zahl als die gegebene Anzal nach Aufgabe 24 zu summiren, und diese Summ mit 2 zu multipliziren. Darnach bilden:

1 Kreislinie $\frac{1 . 0 . 2}{2} = 0$ P.
2 Kreislinien $\frac{2 . 1 . 2}{2} = 2$ "
3 " $\frac{3 . 2 . 2}{2} = 6$ "
4 " $\frac{4 . 3 . 2}{2} = 12$ "
5 " $\frac{5 . 4 . 2}{2} = 20$ "
6 " $\frac{6 . 5 . 2}{2} = 30$ "
7 " $\frac{7 . 6 . 2}{2} = 42$ "
8 " $\frac{8 . 7 . 2}{2} = 56$ "
9 " $\frac{9 . 8 . 2}{2} = 72$ "
10 " $\frac{10 . 9 . 2}{2} = 90$ "

28. Berechnung der höchsten Anzahl von Durchschnittspunkten, welche von zwei verschiedenen Haufen von Linien gebildet werden können.

1) Die Linien beider Haufen sind gleichlaufend.

In diesem Falle kann jede Linie des einen Haufens jede Linie des andern durchschneiden; daher erhält man die höchste Anzahl der Durchschnittspunkte, wenn man die Anzahl der beiden Haufen multiplizirt. Z. B. 12 Linien bilden die Haufen:

11 und 1, und bilden 11 . 1 = 11 Durchschnittspkte.
10 " 2, " " 10 . 2 = 20 "
9 " 3, " " 9 . 3 = 27 "
8 " 4, " " 8 . 4 = 32 "
7 " 5, " " 7 . 5 = 35 "
6 " 6, " " 6 . 6 = 36 "

2) Die Linien beider Haufen sind ungleichlaufend, und durchschneiden sich in einem Punkte.

In diesem Falle kann jede Linie des einen Haufens jede Linie des andern durchschneiden; und überdies bringt jeder Haufen noch 1 Punkt hinzu. Man findet also für diesen Fall die höchste Anzahl der Durchschnittspunkte, wenn man die Anzahl der Linien des einen Haufens mit der Anzahl des andern multiplizirt, und noch 2 addirt. 12 Linien bilden z. B. die Haufen:

10 und 2, und durchschneiden sich in 10 . 2 + 2 = 22 P.
9 " 3, " " " " 9 . 3 + 2 = 29 "
8 " 4, " " " " 8 . 4 + 2 = 34 "
7 " 5, " " " " 7 . 5 + 2 = 37 "
6 " 6, " " " " 6 . 6 + 2 = 38 "

3) Die Linien des einen Haufens sind gleichlaufend, die des andern durchschneiden sich aber in einem Punkte.

In diesem Falle kann jede Linie des einen Haufens jede Linie des andern durchschneiden; überdies bilden die Linien des einen Haufens unter sich noch einen Punkt. Man erhält also die höchste Anzahl, wenn man die Zahlen der beiden Haufen mit einander multiplizirt, und 1 addirt. Z. B. 12 bilden die Haufen:

10 und 2, welche bilden $10 \cdot 2 + 1 = 21$ P.
9 " 3, " " $9 \cdot 3 + 1 = 28$ "
8 " 4, " " $8 \cdot 4 + 1 = 33$ "
7 " 5, " " $7 \cdot 5 + 1 = 36$ "
6 " 6, " " $6 \cdot 6 + 1 = 37$ "

4) Die Linien des einen Haufens sind gleichlaufend, und die des andern schneiden sich in der höchsten Anzahl von Punkten.

In diesem Falle kann jede Linie des einen Haufens jede Linie des andern durchschneiden. Man erhält also die höchste Anzahl der Durchschnittspunkte, wenn man die Zahlen beider Haufen mit einander multiplizirt, und dazu zählt die höchste Anzahl, welche die Linien des einen Haufens bilden, die nach Aufgabe 26 berechnet wird. Z. B. die Zahl 18 bilde die Haufen:

16 und 2, welche bilden: $16 \cdot 2 + \frac{2 \cdot 1}{2} = 33$ P.
15 " 3, " " $15 \cdot 3 + \frac{3 \cdot 2}{2} = 48$ "
14 " 4, " " $14 \cdot 4 + \frac{4 \cdot 3}{2} = 62$ "
13 " 5, " " $13 \cdot 5 + \frac{5 \cdot 4}{2} = 75$ "
12 " 6, " " $12 \cdot 6 + \frac{6 \cdot 5}{2} = 87$ "

11 und 7, welche bilden: $11 \cdot 7 + \frac{7 \cdot 6}{2} = 98$ P.

10 „ 8, „ „ $10 \cdot 8 + \frac{8 \cdot 7}{2} = 108$ „

9 „ 9, „ „ $9 \cdot 9 + \frac{9 \cdot 8}{2} = 117$ „

5) Die Linien des einen Haufens schneiden sich in der höchsten Anzahl von Punkten, und die des andern schneiden sich in einem Punkte.

Jede Linie des einen Haufens kann jede des andern schneiden; man findet also die höchste Anzahl von Durchschnittspunkten, wenn man zur höchsten Anzahl der Punkte des einen Haufens das Produkt der beiden Zahlen der Haufen und noch 1 hinzusetzt. Zerlegt man z. B. 10 in die Haufen:

8 und 2, so erhält man: $\frac{8 \cdot 7}{2} + 8 \cdot 2 + 1 = 45$ P.

7 „ 3, „ „ „ $\frac{7 \cdot 6}{2} + 7 \cdot 3 + 1 = 43$ „

6 „ 4, „ „ „ $\frac{6 \cdot 5}{2} + 6 \cdot 4 + 1 = 40$ „

5 „ 5, „ „ „ $\frac{5 \cdot 4}{2} + 5 \cdot 5 + 1 = 36$ „

---

29. Berechnung der höchsten Anzahl von graden Linien, welche zwischen einer Anzahl Punkte liegen, wovon je zwei in einer Richtung sind.

Aufl. 1) Bei zwei Punkten kann von jedem derselben an den andern eine grade Linie gezogen werden, also im Ganzen 2, wo man aber diese Linie doppelt gezählt hat. 2) Bei 3 Punkten kann man von jedem derselben an die 2 übrigen

2 grade Linien, also im Ganzen $3 . 2 = 6$ ziehen; in diesem Falle hat man aber jede Linie doppelt gezogen. Um daher die höchste Anzahl zu finden, multiplizirt man die Anzahl der Linien mit der um 1 geringeren Zahl, und dividirt dieses Produkt durch 2. Alsdann liegen zwischen:

2 P. $\frac{2 . 1}{2} = 1$ Linie.

3 " $\frac{3 . 2}{2} = 3$ "

4 " $\frac{4 . 3}{2} = 6$ "

5 " $\frac{5 . 4}{2} = 10$ "

6 " $\frac{6 . 5}{2} = 15$ "

7 " $\frac{7 . 6}{2} = 21$ "

8 " $\frac{8 . 7}{2} = 28$ " u. s. w.

---

30. Berechnung aller Strecken, welche zwischen einer gegebenen Anzahl von Punkten in einer graden Linie liegen können.

Aufl. Bei 2 Punkten geht von jedem aus an den andern 1, bei 3 Punkten von jedem an die übrigen 2, bei 4 Punkten von jedem an die übrigen 3 Strecken, also im Ganzen:

Bei 2 P. $2 . 1 = 2$;

" 3 " $3 . 2 = 6$;

" 4 " $4 . 3 = 12$;

" 5 " $5 . 4 = 20$ u. s. w.

In diesem Falle ist aber jede Strecke doppelt gezählt worden, folglich, um die wahre Anzahl zu finden, müssen obige Produkte: 2, 6, 12, 20 u. s. w. noch durch 2 dividirt werden. Man wird also die höchste Anzahl von Strecken finden, wenn man die Anzahl der Punkte mit der um 1 geringern Zahl multiplizirt, und dieses Produkt durch 2 dividirt. Also zwischen:

2	Punkten	liegen	$\frac{2 \cdot 1}{2}$	= 1	Strecke;
3	"	"	$\frac{3 \cdot 2}{2}$	= 3	Strecken;
4	"	"	$\frac{4 \cdot 3}{2}$	= 6	"
5	"	"	$\frac{5 \cdot 4}{2}$	= 10	"
6	"	"	$\frac{6 \cdot 5}{2}$	= 15	"
7	"	"	$\frac{7 \cdot 6}{2}$	= 21	"
20	"	"	$\frac{20 \cdot 19}{2}$	= 190	"
30	"	"	$\frac{30 \cdot 29}{2}$	= 435	"

---

31. Berechnung aller Strecken, welche zwischen den Punkten liegen, in welchen sich grade Linien höchstens durchschneiden.

Aufl. — Weiß man wie viele Punkte in jeder der Linien liegen, so kann man nach Aufgabe 30 alle mögliche Strecken berechnen. Diese Zahl der Punkte in jeder Linie ist aber um 1 ge-

ringer als die Anzahl der Linien, da jede z. B. von 6 Linien durch 5 geschnitten wird. Hat man auf diese Weise die Anzahl der möglichen Strecken in einer Linie gesucht, so muß diese noch durch die Anzahl der Linien multiplizirt werden, da in jeder der Linien gleichviel Strecken liegen müssen. Wenn sich daher folgende Anzahlen von graden Linien in der höchsten Anzahl von Punkten schneiden, so gibt es:

Bei 2 Linien $\frac{2 . 1 . 0}{2} = 0$ Strecken.

" 3 " $\frac{3 . 2 . 1}{2} = 3$ "

" 4 " $\frac{4 . 3 . 2}{2} = 12$ "

" 5 " $\frac{5 . 4 . 3}{2} = 30$ "

" 6 " $\frac{6 . 5 . 4}{2} = 60$ "

" 7 " $\frac{7 . 6 . 5}{2} = 105$ "

" 8 " $\frac{8 . 7 . 6}{2} = 168$ "

" 9 " $\frac{9 . 8 . 7}{2} = 252$ "

" 10 " $\frac{10 . 9 . 8}{2} = 360$ " u. s. w.

32. Berechnung der Geren (Diagonalen), welche in den gradlinigen Figuren möglich sind.

Aufl. — Im Dreieck ist keine Gere möglich, da alle Eckpunkte schon durch Linien verbunden sind; —

im 4 Eck ist von jedem Eckpunkte eine Gere möglich, also 4 — 3; — im 5 Eck sind aus jedem Eckpunkte 2, d. i. 5 — 3 Geren möglich; — im 6 Eck, aus jedem Eckpunkte 3, d. i. 6 — 3; und so sind aus jedem Eckpunkte eines Vielecks so viele Geren möglich, als Eckpunkte vorhanden sind, weniger 3. Alle möglichen Geren wird man also finden, wenn man die um 3 verminderte Anzahl der Eckpunkte mit der ganzen Anzahl derselben multiplizirt. In diesem Falle aber wäre jede Gere doppelt gezählt; daher muß dieses Produkt noch durch 2 dividirt werden, um die wahre Anzahl zu finden. Daher sind:

Im 3 Eck $\frac{3\,(3-3)}{2} = \frac{3\,.\,0}{2} = 0$ Geren möglich.

" 4 " $\frac{4\,(4-3)}{2} = \frac{4\,.\,1}{2} = 2$ " "

" 5 " $\frac{5\,(5-3)}{2} = \frac{5\,.\,2}{2} = 5$ " "

" 6 " $\frac{6\,(6-3)}{2} = \frac{6\,.\,3}{2} = 9$ " "

" 7 " $\frac{7\,(7-3)}{2} = \frac{7\,.\,4}{2} = 14$ " "

" 8 " $\frac{8\,(8-3)}{2} = \frac{8\,.\,5}{2} = 20$ " "

" 9 " $\frac{9\,(9-3)}{2} = \frac{9\,.\,6}{2} = 27$ " "

" 10 " $\frac{10\,(10-3)}{2} = \frac{10\,.\,7}{2} = 35$ " "

" 11 " $\frac{11\,(11-3)}{2} = \frac{11\,.\,8}{2} = 44$ " "

" 12 " $\frac{12\,(12-3)}{2} = \frac{12\,.\,9}{2} = 54$ " u. s. w.

33. Berechnung der höchsten Anzahl Winkel, welche mit einer gegebenen Anzahl grader Linien gebildet werden kann.

Aufl. Da um jeden Punkt, in welchem sich zwei grade Linien schneiden, 4 Winkel liegen, so findet man die höchste Anzahl Winkel, wenn man die höchste Anzahl der Durchschnittspunkte mit 4 multiplizirt. — Es bilden also:

2 Linien $\frac{4 . 2 . 1}{2} = 4$ W.

3 " $\frac{4 . 3 . 2}{2} = 12$ "

4 " $\frac{4 . 4 . 3}{2} = 24$ "

5 " $\frac{4 . 5 . 4}{2} = 40$ "

6 " $\frac{4 . 6 . 5}{2} = 60$ "

7 " $\frac{4 . 7 . 6}{2} = 84$ "

8 " $\frac{4 . 8 . 7}{2} = 112$ "

10 " $\frac{4 . 10 . 9}{2} = 180$ " u. s. w.

34. Berechnung der höchsten Anzahl von Dreiecken, welche durch eine gegebene Anzahl grader Linien gebildet werden kann.

Aufl. — Zu diesem Ende müssen sich die gegebenen Linien in der höchsten Anzahl von Punkten durchschneiden. Zwischen je zwei Durchschnittspunkten liegt eine Strecke in jeder Linie, und

über jeder Strecke ein Dreieck. Indem man aber über jeder Strecke ein Dreieck annimmt, hat man jedes 3 mal gezählt, da jedes Dreieck 3 Seiten hat. Um also die wahre Anzahl zu finden, müssen die Ausdrücke $\frac{2.1.0}{2}$, $\frac{3.2.1}{2}$, $\frac{4.3.2}{2}$ u. s. w. in der Aufgabe 31, welche die höchste Anzahl der möglichen Strecken andeuten, nochmals durch 1.3 dividirt werden, und man findet alsdann:

Bei 3 Linien	$\frac{3.2.1}{1.2.3}$	=	1	Dreieck.
„ 4 „	$\frac{4.3.2}{1.2.3}$	=	4	Dreiecke.
„ 5 „	$\frac{5.4.3}{1.2.3}$	=	10	„
„ 6 „	$\frac{6.5.4}{1.2.3}$	=	20	„
„ 7 „	$\frac{7.6.5}{1.2.3}$	=	35	„
„ 8 „	$\frac{8.7.6}{1.2.3}$	=	56	„
„ 9 „	$\frac{9.8.7}{1.2.3}$	=	84	„
„ 10 „	$\frac{10.9.8}{1.2.3}$	=	120	„

35. Berechnung der höchsten Anzahl nebeneinanderliegender Parallelogramme, welche durch zwei Haufen grader Linien gebildet werden können.

Aufl. Zwei und zwei Parallellinien bilden nur ein Parallelogramm, welches durch den einen

Zwischenraum zwischen den Linien des einen und denen des andern Haufens gebildet ist. — Drei und zwei Parallellininien bilden zwei nebeneiander liegende Parallelogramme, welche durch 1 und 2 Zwischenräume gebildet sind. Man findet also die höchste Anzahl der nebeneinander liegenden Parallelogramme, wenn man die Anzahl der Zwischenräume beider Haufen, welche jedesmal um 1 geringer ist, als die Anzahl der Linien, mit einander multiplizirt. Es bilden also:

2 gleichlauf. u. 2 gleichl. L. (2-1) × (2-1) = 1 . 1 = 1 Pgr
3 " " 2 " " (3-1) × (2-1) = 2 . 1 = 2 "
4 " " 2 " " (4-1) × (2-1) = 3 . 1 = 3 "
5 " " 2 " " (5-1) × (2-1) = 4 . 1 = 4 "

3 " " 3 " " (3-1) × (3-1) = 2 . 2 = 4 "
4 " " 3 " " (4-1) × (3-1) = 3 . 2 = 6 "
5 " " 3 " " (5-1) × (3-1) = 4 . 2 = 8 "
6 " " 3 " " (6-1) × (3-1) = 5 . 2 = 10 "

6 " " 7 " " (6-1) × (7-1) = 5 . 6 = 30 "
7 " " 8 " " (7-1) × (8-1) = 6 . 7 = 42 "
8 " " 12 " " (8-1) × (12-1) = 7 . 11 = 77 "

---

36. Berechnung aller neben- und übereinanderliegender Parallelogramme, welche durch zwei Haufen Parallellinien gebildet werden können.

Aufl. — Zwischen je zwei gleichlaufenden Linien liegt nur ein Zwischenraum; — zwischen drei gleichlaufenden Linien liegen so viele Zwischenräume, als Strecken zwischen 3 Punkten, also $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$;

— zwischen 4 gleichlaufenden Linien also $\frac{4.3}{2}$;
zwischen 5 gleichlaufenden L. $\frac{5.4}{2}$ u. s. w. —
Man erhält aber die Anzahl der durch zwei Haufen Parallelen gebildeter Parallelogramme, indem man die Anzahlen der Zwischenräume multiplizirt. Daher findet man:

leichl.		u. gleichl.					
2	,	2	: $\frac{2.1}{2} \times \frac{2.1}{2}$	=	1.1	=	1 Pgr
3	,	2	: $\frac{3.2}{2} \times \frac{2.1}{2}$	=	3.1	=	3 ,
4	,	2	: $\frac{4.3}{2} \times \frac{2.1}{2}$	=	6.1	=	6 ,
5	,	2	: $\frac{5.4}{2} \times \frac{2.1}{2}$	=	10.1	=	10 ,
3	,	3	: $\frac{3.2}{2} \times \frac{3.2}{2}$	=	3.3	=	9 ,
4	,	3	: $\frac{4.3}{2} \times \frac{3.2}{2}$	=	6.3	=	18 ,
5	,	3	: $\frac{5.4}{2} \times \frac{3.2}{2}$	=	10.3	=	30 ,
6	,	3	: $\frac{6.5}{2} \times \frac{3.2}{2}$	=	15.3	=	45 ,
4	,	4	: $\frac{4.3}{2} \times \frac{4.3}{2}$	=	6.6	=	36 ,
5	,	4	: $\frac{5.4}{2} \times \frac{4.3}{2}$	=	10.6	=	60 ,
6	,	4	: $\frac{6.5}{2} \times \frac{4.3}{2}$	=	15.6	=	90 ,
7	,	4	: $\frac{7.6}{2} \times \frac{4.3}{2}$	=	21.6	=	126 ,

$$5 \;,\; 5 : \frac{5.4}{2} \times \frac{5.4}{2} = 10.10 = 100 \;,$$

$$6 \;,\; 5 : \frac{6.5}{2} \times \frac{5.4}{2} = 15.10 = 150 \;,$$

$$7 \;,\; 5 : \frac{7.6}{2} \times \frac{5.4}{2} = 21.10 = 210 \;,$$

$$8 \;,\; 5 : \frac{8.7}{2} \times \frac{5.4}{2} = 28.10 = 280 \;,$$

$$10 \;,\; 9 : \frac{10.9}{2} \times \frac{9.8}{2} = 45.36 = 1620 \;,$$

$$12 \;,\; 20 : \frac{12.11}{2} \times \frac{20.19}{2} = 66.190 = 12540 \;,$$

$$16 \;,\; 18 : \frac{16.15}{2} \times \frac{18.17}{2} = 120.153 = 18360 \;.$$

Berichtigungen.

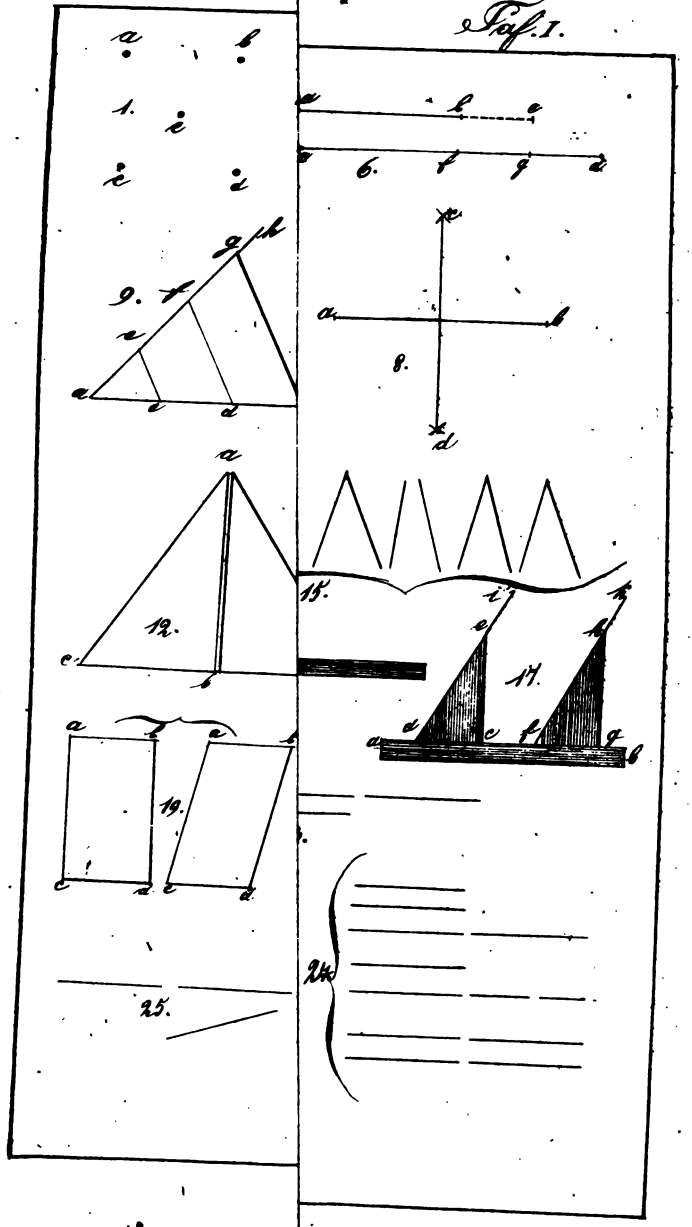
Seite 57. Z. 21. von oben lese sind statt ist.

— 173. Z. 11. von oben lese zwei Paar gleiche Winkel, statt zwei Paar gleiche Seiten.

— 180. Z. 3. von unten lese △ AED stat △ AAD.

— 195 Z. 13. von oben lese W. O gemeinschaftlich.

Taf. I.



NEW YORK PUBLIC LIBRARY
REFERENCE DEPARTMENT

ook is under no circumstances to be
from the Building